

MEMOIRE D'HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES

spécialité MECANIQUE

présenté à
l'Université Pierre et Marie Curie
- Paris VI

par Etienne Balmès

sujet:

MODÈLES EXPÉRIMENTAUX COMPLETS
ET MODÈLES ANALYTIQUES RÉDUITS
EN DYNAMIQUE DES STRUCTURES

Rapport provisoire au 22/4/97

DRET/AC
ONERA Direction des structures

PLAN DU MÉMOIRE

PLAN DU MEMOIRE.....	1
AVANT PROPOS.....	3
1. INTRODUCTION	4
2. MODES, MODELES MODAUX, ERREURS.....	7
2.1. Modèles de systèmes dynamiques	7
2.1.1. Modèles d'état d'un système dynamique.....	7
2.1.2. Modèles mécaniques du second ordre	10
2.1.3. Modes complexes.....	11
2.1.4. Modes Normaux.....	13
2.1.5. Multiplicité, réciprocity et autres propriétés des structures	14
2.2. Modèles mécaniques dissipatifs.....	15
2.2.1. Modèles et modèles équivalents de dissipation	15
2.2.2. Modèle du second ordre complet et flexibilité résiduelle.....	19
2.2.3. Amortissement proportionnel et proportionnel par bloc.....	19
2.2.4. Modes complexes d'un modèle complet à amortissement visqueux.....	21
2.3. Commentaires sur la notion d'erreur	23
2.3.1. Modèles non paramétriques de fonctions de transfert	23
2.3.2. Erreur sur les propriétés modales.....	25
2.3.3. Erreur sur les propriétés géométriques et élastiques.....	29
2.4. Conclusions et perspectives	30
3. IDENTIFICATION DE MODELES MODAUX	31
3.1. Identification des propriétés modales	31
3.1.1. Classification des méthodes existantes	32
3.1.2. Besoins et solutions permises par IDRC et IDRM	35
3.1.3. Optimisation d'un modèle pôle/résidu non contraint (algorithme IDRC)39	
3.1.4. Exemples d'applications.....	41
3.1.5. Efficacité par rapport aux méthodes usuelles	43
3.2. Contraintes physiques et modèles associés (algorithme IDRM)	45
3.2.1. Tests MIMO et modèles minimaux	46
3.2.2. Modèles réciproques	47
3.2.3. Modes normaux et propriétés de masse, raideur et amortissement.....	49
3.3. Identification des modes normaux par appropriation	52
3.3.1. Principes et pratique sur des structures aéronautiques.....	52
3.3.2. Extraction automatique des paramètres modaux	55
3.3.3. Quelques réflexions additionnelles.....	56
3.4. Comparaison internationale de tests sur une structure représentative	58
3.4.1. Conception de la structure et spécifications du test commun.	58
3.4.2. Mesures de fonctions de transfert.	61

3.4.3. Extractions de paramètres modaux	62
3.5. Conclusions et perspectives	63
4. MODELES REDUITS COUPLES	65
4.1. Méthodes de réduction de modèle.	66
4.1.1. Projection d'un modèle complet.....	66
4.1.2. Chargement représentatif en force	67
4.1.3. Chargement représentatif en déplacement	68
4.1.4. La méthode optimale.....	69
4.1.5. Traitement des modèles à modes de corps rigide	70
4.2. Réduction et norme en énergie.....	72
4.2.1. Directions principales dans une base de réduction	72
4.2.2. Mesure d'erreur pour un modèle modal	73
4.2.3. Correction itérative d'un modèle réduit.....	75
4.3. Modélisation des systèmes couplés.....	77
4.3.1. Formes de couplages.....	77
4.3.2. Discrétisation des interfaces.....	80
4.3.3. Réduction, conformité et verrouillage	81
4.3.4. Traitement numérique des conditions de Dirichlet généralisées	83
4.3.5. Liens entre condition aux limites de Neumann et condensation statique.....	85
4.4. Utilisation de résultats expérimentaux dans les modèles réduits.....	86
4.4.1. Modèles hybrides expérimentaux/analytiques	86
4.4.2. Synthèse modale en utilisant un amortissement expérimental.....	87
4.5. Conclusions et perspectives	89
5. MODELES REDUITS PARAMETRES	90
5.1. Réduction de modèles paramétrés.....	90
5.1.1. Paramétrisation des modèles initiaux.....	90
5.1.2. Réduction d'un modèle paramétré.....	93
5.2. Modélisation et réduction multi-échelle	96
5.3. Conclusions et perspectives	98
BIBLIOGRAPHIE GENERALE.....	100
CURRICULUM VITAE.....	105
PUBLICATIONS.....	107

AVANT PROPOS

Ayant débuté dans une équipe étudiant les aspects théoriques et technologiques du contrôle actif des structures, mon activité, dont ce mémoire fait la synthèse, a toujours été à l'interface entre le test et la modélisation analytique du comportement vibratoire des structures.

Sur l'aspect expérimental, mes travaux sont marqués par l'introduction et la validation d'une méthode générale d'identification des systèmes linéaires et de méthodes particulières pour le traitement des contraintes supposées de multiplicité, réciprocity, et complétude ¹. J'ai encadré et réalisé des travaux sur l'utilisation de ces méthodes dans le cadre des tests de structures par appropriation modale réalisés par l'équipe d'essais au sol de l'ONERA ². J'ai par ailleurs animé les travaux d'un groupe d'action structures et matériaux du GARTEUR dont l'objectif était de faire l'état de l'art des méthodes d'analyse modale expérimentale par le test d'une structure représentative unique dans 12 laboratoires européens ³.

La possibilité, démontrée sur un cas réel ⁴, de créer des modèles expérimentaux complets caractérisant séparément les propriétés de masse, d'amortissement et de raideur, permet de considérer des modèles hybrides dont les propriétés de masse et de raideur découlent d'une modélisation élément fini et les propriétés d'amortissement d'un test expérimental ⁵. L'extension de ces travaux sur l'amortissement au cas de structures à comportement viscoélastique marqué est une de mes préoccupations actuelles ⁶.

Le test ne conduisant qu'à des modèles de faible taille, il est généralement souhaitable et parfois indispensable d'utiliser des modèles similaires dans le cadre de prédictions purement analytiques. Cette constatation a motivé mes travaux dans les domaines de la représentation des erreurs de modélisation ⁷, la réduction de modèle ⁸, la synthèse modale ⁹, et l'extension de méthodes classiques de réduction aux problèmes paramétrés liés au recalage, à l'optimisation et à la dynamique non linéaire ¹⁰.

Les travaux réalisés se sont concrétisés par l'écriture d'un logiciel ¹¹ utilisé par une cinquantaine d'entreprises et laboratoires dans plus de dix pays. Les mises à jour successives de ce logiciel m'ont permis de valider les méthodes développées et de les rendre facilement accessibles pour des tests industriels, des travaux de recherche sur la modélisation ou de l'enseignement.

Publications concernées

¹	(1),(2),(9),(12)-(16),(22),(29),(31)	⁷	(8),(9),(10),(33)
²	(17),(25)	⁸	(3),(5)
³	(1),(12)-(14),(19)	⁹	(5),(21),(23),(24)
⁴	(2),(29)	¹⁰	(4),(23),(26),(32)
⁵	(6),(7),(27),(28),(30)	¹¹	(16)
⁶	(18),(20)		

1. INTRODUCTION

Le comportement vibratoire des structures est souvent crucial pour, par exemple, des raisons de sécurité (instabilités aéroélastiques, résistance et fatigue), de précision (visée optique sur satellite), de discrétion ou de confort (rayonnement acoustique dans les sous-marins ou les voitures). La conception et certification des structures passent donc souvent par une caractérisation du comportement dynamique en conditions de fonctionnement.

Avant que la structure n'existe, on peut construire un modèle analytique à partir des propriétés géométriques désirées et de la connaissance du comportement des matériaux. Ce modèle est très flexible puisqu'il peut être aussi raffiné que nécessaire. Cependant les problèmes vibratoires se posent généralement pour des structures assemblées complexes pour lesquelles la description géométrique et matérielle est forcément assez simplifiée (liaisons modélisées comme parfaites, habillage ignoré, seules quelques non linéarités majeures prises en compte). Même en faisant toutes les simplifications dont l'effet est visiblement négligeable, les modèles utilisés restent très grands. Les calculateurs modernes permettent de résoudre certains problèmes sur de très gros modèles mais on s'intéresse généralement à des *variations paramétriques*, optimisation ou réponse non linéaire, qui exigent de nombreuses itérations et ne sont pas abordables de manière directe.

Plutôt que de forcer une simplification excessive de la description de la structure ou du maillage élément fini associé, on s'intéresse ici à des méthodes permettant de diminuer le coût des itérations par réutilisation d'informations liées à des calculs spécifiques. La projection du modèle sur une base modale tronquée est la méthode de *réduction* la plus simple. On calcule ainsi les modes de modèle complet pour permettre la prédiction de nombreuses fonctions de transfert ou réponses temporelles. Pour d'autres cas plus complexes, modèles par sous domaines, modèles couplés ou modèles à coefficients variables, le problème est d'assurer une bonne précision finale pour l'ensemble des prédictions considérées en ne réalisant que quelques calculs sur le modèle initial.

Quand la structure existe, la caractérisation la plus précise est donnée par un test. Le chargement appliqué lors du test ne peut que rarement reproduire les conditions de fonctionnement vraiment recherchées (on teste un avion au sol pour s'assurer qu'il n'y aura pas de flottement en vol, etc.). Il faut donc créer (on parle d'*identification*) un modèle permettant des extrapolations à d'autres cas de chargement ou à des structures voisines. Les prédictions permises par un modèle dynamique basé uniquement sur des données expérimentales étant assez limitées, on cherche à combiner les résultats de test avec le modèle analytique basé sur une description géométrique et matérielle. Cette étape peut conduire à une correction (on parle de *recalage*) de la description géométrique et matérielle ou à l'utilisation de *modèles hybrides* combinant prédictions analytiques et paramètres identifiés expérimentalement.

Le fil conducteur de ce mémoire est la caractérisation de modèles expérimentaux et de modèles analytiques réduits et leur comparaison avec le cas nominal du modèle projeté sur une base modale tronquée. Un point central de cette étude est le fait qu'un modèle dynamique caractérise la relation entre chargements (entrées u) et réponses (sorties y) pour un ensemble restreint d'entrées et de sorties considérées. Les entrées et sorties considérées sont caractérisées par des restrictions posées sur leurs propriétés spatiales et fréquentielles. Des restrictions posées à l'avance permettent de guider la réduction d'un modèle analytique. Inversement, les restrictions pratiques d'un test limitent les propriétés modales, géométriques, élastiques ou de dissipation pouvant être estimées à partir de la mesure.

Les deux premiers chapitres sont consacrés à l'étude des modèles modaux d'une structure nominale. Du point de vue théorique, le chapitre 2 met en évidence les différences entre propriétés liées à une décomposition spectrale générale d'un système linéaire invariant dans le temps et propriétés liées à une description en termes de propriétés de masse, raideur et dissipation dans la base des modes normaux. On voit en particulier quels types de systèmes peuvent être décrits à l'aide d'une base tronquée de modes normaux et d'un amortissement visqueux non proportionnel. La non unicité des définitions de l'erreur sur les fonctions de transfert, de l'erreur sur les modes et modèles modaux et de l'erreur sur les paramètres géométriques et matériels est enfin mise en évidence.

Du point de vue expérimental, le chapitre 3 présente mes travaux sur l'identification de modes et de modèles masse-amortissement-raideur en coordonnées principales. Des extensions significatives des approches traditionnellement utilisées pour l'identification sont proposées et des essais, ayant permis leur validation et la démonstration de leurs avantages, sont donnés en exemple. La pratique de l'identification dans un cadre industriel ayant ses aspects uniques, on résume les points clés d'études menées sur la méthode d'identification par appropriation modale et d'une action européenne visant à faire un point sur l'état de l'art dans le domaine.

Les chapitres 4 et 5 sont consacrés aux méthodes de réduction d'un modèle issu d'une discrétisation initiale fine. Plutôt que d'utiliser une perspective historique et de tenter une présentation synthétique de méthodes similaires connues sous le nom de condensation, sous structuration dynamique, synthèse modale, superélément, décomposition de domaine, etc., on montre comment les méthodes de réduction peuvent être motivées par des restrictions spatiales et fréquentielles sur les chargements considérés. Une décomposition en valeurs singulières, basée sur la norme en énergie, est ensuite utilisée pour la réduction, l'évaluation de l'erreur associée à un modèle réduit et sa correction.

La réduction étant souvent réalisée au niveau de modèles de composants, des prédictions de réponses couplées sont considérées. On montre comment les conditions de continuité des déplacements et/ou contraintes correspondent à la limite pour une interface d'extension nulle d'un couplage par impédance d'interface. Cette présentation des équations classiques de couplage comme limite d'un cas plus général permet de bien mettre en évidence les phénomènes de verrouillage parfois rencontrés et de proposer des solutions pour leur traitement.

Les modèles analytiques ne peuvent que rarement conduire à une description précise de l'amortissement. On est donc amené à utiliser des modèles hybrides dont les

propriétés de dissipation sont des résultats expérimentaux. Ce type de modèle donne de bons résultats pour des prédictions simples mais présente des limitations pour des prédictions couplées qu'il convient de caractériser.

Le chapitre 5 étudie enfin une extension de la notion de chargement à des modifications du modèle (loi de comportement, géométrie, conditions aux limites, amortissement, non linéarité). Cette extension motive l'utilisation de modèles réduits paramétrés. Les paramètres considérés dans les exemples donnés sont des propriétés élastiques (module) et géométriques (position de raidisseurs, longueurs de tubes). Les applications abordées sont l'optimisation/recalage de modèles de structures linéaires et une première forme de non linéarité liée à un module complexe dépendant de la fréquence. Il est enfin montré comment différentes échelles de modélisation peuvent conduire à des niveaux successifs de réductions.

2. MODES, MODÈLES MODAUX, ERREURS

La réponse d'un système dynamique linéaire et invariant dans le temps peut, sauf cas pathologique, être décrite sous la forme d'une somme de contributions modales indépendantes. La section 2.1, composée essentiellement de rappels, propose une analyse comparée des décompositions spectrales habituellement utilisées en dynamique des structures. Les notions clés sont la décomposition spectrale sur la base des modes complexes, la projection d'un modèle du second ordre sur la base des modes normaux et la caractérisation des propriétés particulières des modèles mécaniques.

On cherche généralement en mécanique à représenter la réponse de la structure en termes de propriétés de masse, raideur et dissipation. La section 2.2 introduit les différents modèles usuels de dissipation, compare leurs propriétés et, pour la représentation visqueuse, montre l'équivalence des hypothèses de complétude, d'amortissement proportionnel par bloc et de propriété de la décomposition spectrale (modèle pôle / mode complexe).

Un modèle permet l'estimation de quantités physiques: fonctions de transfert, modes et propriétés géométriques/élastiques. La résolution de problèmes inverses (identification et recalage) est basée sur l'hypothèse que les transformations entre modèles basés sur ces différents paramètres sont bijectives et bien conditionnées. La section 2.3 introduit différents critères permettant la comparaison de ces quantités et sur quelques cas représentatifs montre que le conditionnement des transformations peut être mauvais et/ou dépendre du critère retenu.

2.1. Modèles de systèmes dynamiques

2.1.1. Modèles d'état d'un système dynamique

De manière générale, les systèmes dynamiques sont caractérisés par des modèles décrivant la relation entre les chargements appliqués et les mesures possibles de la réponse. Dans la terminologie des automaticiens, le modèle donne une représentation de la relation entre entrées u et sorties y . Les modèles utilisés en dynamique des systèmes peuvent généralement être décrits sous la forme de **modèles d'état** où les sorties dépendent d'une variable x qui décrit complètement l'état du système.

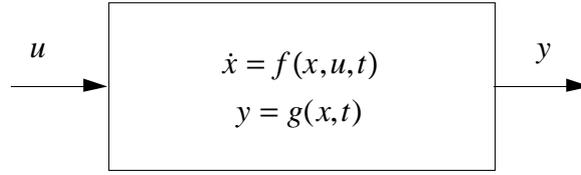


Figure 2.1: représentation en diagramme bloc d'un modèle d'état.

Toute transformation bijective $\bar{x} = g(x)$ permet de redéfinir les états x sans modifier le modèle (relation entrée/sortie). Les propriétés physiques d'un système dynamique sont donc liées à la définition unique d'entrées u et de sorties y alors que, de manière générale, la réponse des états est liée à des choix arbitraires de modélisation.

On s'intéresse plus particulièrement ici aux modèles linéaires invariants dans le temps que l'on peut généralement mettre sous la forme standard utilisée en automatique

$$\begin{aligned} \{\dot{x}(t)\} &= [A]\{x(t)\} + [B]\{u(t)\} \\ \{y(t)\} &= [C]\{x(t)\} + [D]\{u(t)\} \end{aligned} \quad (2.1)$$

où les matrices A , B , C et D sont indépendantes du temps et de dimensions finies. Les deux équations sont appelées équations d'état et de mesure.

Les vecteurs propres gauche et droits du modèle (2.1) sont solutions des problèmes aux valeurs propres

$$\{\theta_{jL}\}^T [A] = \lambda_j \{\theta_{jL}\}^T \quad \text{et} \quad [A]\{\theta_{jR}\} = \lambda_j \{\theta_{jR}\} \quad (2.2)$$

Le triplet vecteur propre gauche, vecteur propre droit et valeur propre est appelé **mode complexe** en mécanique. La valeur propre est appelée **pôle**.

Le modèle est dit diagonalisable s'il existe N (nombre d'états) vecteurs propres distincts. Chacun des vecteurs propres étant défini à un coefficient arbitraire près, il est possible de les normaliser de manière à ce que deux conditions d'orthogonalité soient vérifiées

$$[\theta_L]^T [A] [\theta_R] = [\Lambda]_{N \times N} \quad \text{et} \quad [\theta_L]_{N \times N}^T [\theta_R]_{N \times N} = [I]_{N \times N} \quad (2.3)$$

Des conditions d'orthogonalité on tire le modèle d'état diagonal

$$\begin{aligned} \{\dot{\eta}\} &= [A]\{\eta\} + [\theta_L]^T [B]\{u\} \\ \{y\} &= [C][\theta_R]\{\eta\} + [D]\{u\} \end{aligned} \quad (2.4)$$

qui dans le domaine fréquentiel peut aussi être exprimé sous la forme de fraction rationnelle (souvent appelée décomposition spectrale de la réponse)

$$\{y\} = \left[\sum_{j=1}^N \frac{[C]\{\theta_{jR}\}\{\theta_{jL}\}^T [B]}{s - \lambda_j} + [D] \right] \{u\} \quad (2.5)$$

On rappelle que le vecteur $\{\theta_{jL}\}^T [B]$ caractérise la contrôlabilité du mode j (manière dont les entrées u excitent le mode j) et le vecteur $[C]\{\theta_{jR}\}$ son observabilité (manière dont le mode est vu par les sorties/capteurs y). A un facteur d'échelle près (fixé ici par le choix de l'identité dans la deuxième condition d'orthogonalité (2.3)), la

contrôlabilité modale ne dépend que des excitateurs et l'observabilité modale que du choix de capteurs.

A l'exception des valeurs propres multiples (pour lesquelles il convient de considérer la somme des contributions des modes associés), la décomposition spectrale (2.5) est unique. En particulier, elle est identique pour un modèle initial construit sous la forme d'un modèle d'état (2.1) ou pour un modèle du second ordre (2.7) généralement préféré en mécanique.

Il est utile de noter que la forme pôle/résidu (fraction rationnelle (2.5)) est généralement équivalente à la paramétrisation en fraction polynomiale

$$\{y(s)\} = \left[\frac{[a_0] + [a_1]s + \dots + [a_N]s^N}{b_0 + b_1s + \dots + b_Ns^N} \right] \{u(s)\} \quad (2.6)$$

utilisée par les automaticiens pour les méthodes d'identification de système (ARX, ARMAX, OE, etc. voir [lju1]). A quelques exceptions près liées à des racines multiples (en mécanique seuls les modes de corps rigides exigent un traitement particulier) et à des numérateurs d'ordre trop élevé, les formes fraction polynomiale et pôle/résidu sont même strictement équivalentes. On notera cependant que le conditionnement numérique est bien meilleur pour la forme pôle/résidu (le nombre de chiffres significatifs des coefficients nécessaires à une bonne connaissance du modèle est beaucoup plus faible [jac2]).

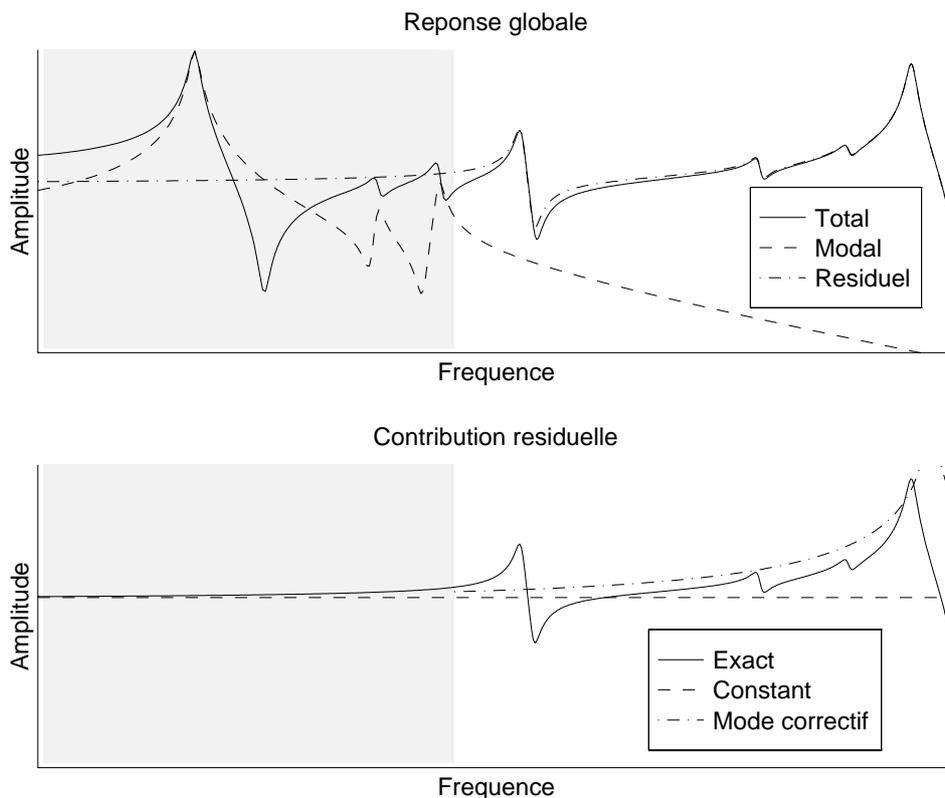


Fig. 2.2: a) Décomposition de la réponse en contributions modales (pôles dont la fréquence est dans la bande considérée, en grisé) et résiduelles. b) Représentations presque équivalentes de la contribution résiduelle exacte.

Les relations entrées sorties sont complètement caractérisées par la donnée des fonctions de transfert mais celles-ci ne sont jamais connues de manière utile que sur une gamme de fréquence restreinte. Dans la décomposition spectrale (2.5), il convient donc de distinguer les contributions modales des pôles dont la fréquence est dans la bande considérée (zone grisée de la figure 2.2) et les contributions résiduelles associées à d'autres pôles. Comme le montre la figure 2.2b, différentes représentations des contributions résiduelles sont possibles. Ainsi sur l'exemple considéré, on voit sur la figure 2.2b qu'il n'y a que très peu de différence entre la contribution résiduelle exacte, sa représentation par une constante ou sa représentation par un mode haute fréquence (c'est ici un mode de correction statique comme détaillé au chapitre 4). Cette différence ne reste faible que dans la bande considérée (en grisé sur la figure) mais ceci n'est pas une restriction car un modèle dynamique de dimension finie ne peut représenter la réponse que sur une bande de fréquence finie.

L'approximation de la contribution résiduelle par une constante (c'est la signification du terme D dans (2.5)) est généralement utilisée pour représenter les contributions de modes non mesurés dans les applications expérimentales (voir section 3.1). L'approximation par un mode supplémentaire est usuelle dans les méthodes de réduction de modèle analytique (voir modes de contrainte ou d'attache en section 4.1). Ces représentations simplifiées ne sont pas forcément suffisantes. En particulier la présence de modes fortement amortis conduit à des variations lentes sur la bande de fréquence qui ne peuvent être prise en compte qu'en incluant les contributions de modes dont la fréquence peut être assez éloignée de la bande considérée (voir un exemple expérimental en Ref. [bal19]). Enfin, si la bande commence à une fréquence non nulle, il peut être nécessaire de représenter les contributions de modes basse fréquence non modélisés (voir section 3.1).

2.1.2. Modèles mécaniques du second ordre

Comme, pour les modèles d'états utilisés en automatique, il convient en dynamique des structures de distinguer états (appelés degrés de liberté et notés q), entrées et sorties. Cette distinction conduit à exprimer les modèles mécaniques classiques sous la forme

$$\begin{aligned} [M]\{\ddot{q}(t)\} + [C]\{\dot{q}(t)\} + [K]\{q(t)\} &= [b]\{u(t)\} \\ \{y(t)\} &= [c] \{q(t)\} \end{aligned} \quad (2.7)$$

pour le domaine temporel et

$$\begin{aligned} [Ms^2 + Cs + K] \{q(s)\} &= [b]\{u(s)\} \\ \{y(s)\} &= [c] \{q(s)\} \end{aligned} \quad (2.8)$$

pour le domaine fréquentiel.

Dans de tels modèles, les charges physiques extérieures (contraintes imposées, champs de pressions, forces de contrôle, gravité, tension appliquée à un piézo-électrique, etc.) sont représentées par le produit d'une matrice d'entrée b indépendante du temps / de la fréquence par un vecteur d'entrées u ($F_q(u) = b u$).

Les champs physiques (translations, rotations, déformations, contraintes, charge dans un piézo-électrique, etc.) sont ici appelés sorties et notés y . A quelques exceptions près (les contraintes principales en particulier), ces champs sont supposés dépendre

linéairement des DDL q (relation $y = c \{q\}$ dans (2.7)-(2.8)). Dans le cas des modèles éléments finis, les fonctions de forme utilisées pour la construction des éléments conduisent à une définition des champs physiques en tout point. En pratique le nombre de sorties considérées est toujours fini (modèle discrétisé ou test avec un nombre fini de capteurs).

Comme pour les modèles d'état généraux, le choix des DDL est arbitraire. Dans le cadre de la méthode des éléments finis, les états, appelés degrés de liberté, sont aussi associés à des déplacements nodaux. Les méthodes de réduction de modèle, considérées au chapitre 4, considèrent au contraire d'autres coordonnées ce qui permet de faire des hypothèses simplificatrices mais demande de bien distinguer états et sorties.

Pour un choix particulier de DDL, la raideur dynamique $K = Ms^2 + Cs + K$ modélise la relation entre la réponse des DDL et l'approximation $[b]\{u\}$ des forces appliquées. Pour des systèmes réciproques la raideur dynamique est généralement supposée symétrique (voir plus de détails en section 2.1.4).

2.1.3. Modes complexes

On appelle modes complexes d'un modèle mécanique, les modes associés à la décomposition spectrale générale (2.5) des modèles linéaires, diagonalisables et invariants dans le temps. Cette décomposition étant unique, il existe de nombreuses manières d'en calculer les termes. Une des approches les plus usuelles est de considérer un modèle du premier ordre équivalent à (2.7)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q} \\ \ddot{q} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \{u\} \\ \{y\} &= \begin{bmatrix} c & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ \dot{q} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.9)$$

auquel on associe deux problèmes aux valeurs propres gauche et droit

$$\begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix} [\theta_R] [\Lambda] + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix} [\theta_R] = [0] \text{ et } [\Lambda] [\theta_L^T] \begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix} + [\theta_L^T] \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix} = [0] \quad (2.10)$$

où Λ est la matrice diagonale des pôles. Les blocs de zéros dans (2.10) impliquent que les vecteurs propres θ peuvent être décomposés en une contribution en déplacement ψ et en vitesse $\psi\Lambda$

$$[\theta_L]_{2N \times 2N} = \begin{bmatrix} [\psi_L]_{N \times 2N} \\ [\psi_L \Lambda]_{N \times 2N} \end{bmatrix} \text{ et } [\theta_R]_{2N \times 2N} = \begin{bmatrix} [\psi_R]_{N \times 2N} \\ [\psi_R \Lambda]_{N \times 2N} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

On notera que la contribution en déplacement est aussi directement liée aux problèmes aux valeurs propres du second ordre

$$[\lambda_j^2 M + \lambda_j C + K] \{\psi_{jR}\} = 0 \text{ et } \{\psi_{jL}^T\} [\lambda_j^2 M + \lambda_j C + K] = 0 \quad (2.12)$$

Pour un modèle diagonalisable, il existe $2N$ vecteurs propres droits et gauches indépendants associés à $2N$ valeurs propres complexes λ_j (pôles). Comme pour le modèle d'état (2.1), il existe alors deux conditions d'orthogonalité

$$\begin{aligned} \theta_L^T \begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix} \theta_R &= \psi_L^T C \psi_R + \Lambda \psi_L^T M \psi_R + \psi_L^T M \psi_R \Lambda = I_{2N} \\ \theta_L^T \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix} \theta_R &= \psi_L^T K \psi_R - \Lambda \psi_L^T M \psi_R \Lambda = -\Lambda \end{aligned} \quad (2.13)$$

dont on tire un modèle d'état diagonal (de la même forme que (2.4))

$$\begin{aligned} \{\dot{\eta}\} &= [\Lambda] \{\eta\} + \begin{bmatrix} \theta_L^T [0] \\ \theta_L^T [b] \end{bmatrix} \{u\} \quad \text{ou} \quad \{\dot{\eta}\} = [\Lambda] \{\eta\} + [\psi_L^T b] \{u\} \\ y &= [c \quad 0] \{\theta_R\} \{\eta\} \quad \quad \quad y = [c \psi_R] \{\eta\} \end{aligned} \quad (2.14)$$

ou la décomposition en fraction rationnelle (correspondant à (2.2.c))

$$\{y(s)\} = \sum_{j=1}^{2N} \frac{\{c \psi_j\} \{b^T \psi_j\}^T}{s - \lambda_j} \{u\} = \sum_{j=1}^{2N} \frac{[R_j]}{s - \lambda_j} \{u\} = [\alpha(s)] \{u(s)\} \quad (2.15)$$

Dans les mesures expérimentales en dynamique des structures, les entrées u correspondent généralement à des forces appliquées et les sorties y à des déplacements/déformations mesurées. La matrice de transfert entre u et y correspond donc à une flexibilité dynamique notée α .

Pour une excitation en déplacement par une base rigide, la fonction de transfert, qui est alors une transmissibilité, garde une forme similaire. Ce type de problèmes, courant pour les tests de satellites sur table d'excitation rigide, est étudié plus en détail en Ref. [gir1].

En présence de modes de corps rigide (déplacements à énergie de déformation nulle), le modèle n'est généralement pas diagonalisable. En supposant que les modes de corps rigide ne sont pas amortis, la réponse peut cependant être mise sous une forme de fraction rationnelle simple

$$[\alpha(s)] = \sum_{j=1}^{2N-2N_R} \frac{[R_j]}{s - \lambda_j} + \sum_{j=1}^{N_R} \frac{[T_{jR}]}{s^2} = \sum_{j=1}^{2N-2N_R} \frac{[R_j]}{s - \lambda_j} + \frac{[T_R]}{s^2} \quad (2.16)$$

Pour un modèle initial réel (et donc pas dans le cas de modèles à amortissement structural avec une raideur complexe), les valeurs et vecteurs propres associés à des pôles complexes viennent en paires conjuguées. Il peut par ailleurs exister un nombre pair de modes à pôles réels. La notion classique d'amortissement critique correspond ainsi au point de transition entre une paire de pôles complexes conjugués et deux modes réels distincts. La flexibilité dynamique des modèles mécaniques du second ordre peut donc être écrite comme une fraction rationnelle de la forme

$$[\alpha(s)] = \sum_{j=1}^{N_C} \left(\frac{[R_j]}{s - \lambda_j} + \frac{[\overline{R_j}]}{s - \overline{\lambda_j}} \right) + \sum_{j=1}^{N_{\text{Real}}} \frac{[T_j]}{s - \lambda_{j\text{Real}}} + \frac{[T_R]}{s^2} \quad (2.17)$$

2.1.4. Modes Normaux

On s'intéresse souvent en mécanique à des modèles sans amortissement. Il est alors usuel de préférer aux modes complexes (modes de système linéaire), une définition purement liée à la description mécanique en termes de masse et de raideur. On définit ainsi les modes dits normaux par un problème aux valeurs propres indépendant des propriétés d'amortissement

$$-[M]\{\phi_j\}\omega_j^2 + [K]_{N \times N}\{\phi_j\}_{N \times 1} = \{0\}_{N \times 1}, \quad (2.18)$$

où pour une masse symétrique définie positive et une raideur symétrique semi-définie positive, il y a toujours N vecteurs propres indépendants ϕ_j (formant une matrice notée ϕ) et valeurs propres ω_j^2 (formant une matrice diagonale notée Ω^2).

En tant que solution du problème aux valeurs propres (2.18), l'ensemble des N modes normaux vérifie deux conditions nécessaires et suffisantes d'orthogonalité par rapport à la masse et la raideur

$$[\phi]^T [M] [\phi]_{N \times N} = [\mu]_{N \times N} \quad \text{et} \quad [\phi]^T [K] [\phi] = [\mu \Omega^2] \quad (2.19)$$

où μ est la matrice diagonale des masses modales. Les masses modales sont des quantités arbitraires liées à l'échelle choisie pour les modes normaux. Il est supposé dans la suite de ce mémoire qu'elles sont égales à 1 ($\mu=I$). Les autres définitions habituelles consistent à normaliser un composante du vecteur ($c\tilde{\phi}_j = 1$) ou le vecteur complet sur DDL considérés ($\|\tilde{\phi}_j\| = 1$). Le vecteur normalisé en masse est alors donné par $\{\phi_j\} = \{\tilde{\phi}_j\}(\mu_j)^{-1/2}$. On note ici que le choix de capteurs est susceptible de modifier la définition de la masse généralisée alors que le vecteur normalisé en masse est toujours défini de manière unique.

L'utilisation des modes normaux comme base de description du modèle conduit à une représentation dite en coordonnées principales (notées p) de la forme

$$\begin{aligned} [Is^2 + \Gamma s + \Omega^2]\{p\} &= [\phi^T b]\{u\} \\ \{y\} &= [c\phi]\{p\} \end{aligned} \quad (2.20)$$

où $\Gamma = \phi^T C \phi$ est la matrice d'amortissement modal, Ω^2 la raideur modale (diagonale des fréquences au carré sous l'hypothèse que les masses modales sont unitaires), $c\phi$ la matrice de sortie modale, et $\phi^T b$ la matrice d'entrée modale. Le modèle (2.20) peut aussi être utilisé sous la forme d'un modèle d'état classique

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \dot{p} \\ \ddot{p} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\Omega^2 & -\Gamma \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p \\ \dot{p} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \phi^T b \end{bmatrix} \{u\} \\ \{y\} &= [c\phi \quad 0] \begin{Bmatrix} p \\ \dot{p} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.21)$$

L'hypothèse d'amortissement proportionnel, dite aussi de Basile, consiste à supposer que Γ est diagonale. L'utilisation de cette hypothèse sera discutée en détail en section

2.2, mais il convient de noter que si un modèle la vérifie, le modèle (2.20) peut aussi être exprimé sous la forme d'une décomposition en fraction rationnelle

$$[\alpha(s)] = \sum_{j=1}^N \frac{\{c\phi_j\}\{b^T\phi_j\}^T}{s^2 + 2\zeta_j\omega_j s + \omega_j^2} = \sum_{j=1}^N \frac{[T_j]}{s^2 + 2\zeta_j\omega_j s + \omega_j^2} \quad (2.22)$$

On montre alors facilement que ce modèle peut aussi se mettre sous la forme

$$[\alpha(s)] = \sum_{j=1}^N \left(-\frac{\{c\phi_j\}\{b^T\phi_j\}^T}{2i\text{Im}(\lambda_j)(s - \lambda_j)} + \frac{\{c\phi_j\}\{b^T\phi_j\}^T}{2i\text{Im}(\lambda_j)(s - \bar{\lambda}_j)} \right) \quad (2.23)$$

où $\lambda_j = -\zeta_j\omega_j + i\omega_j\sqrt{1 - \zeta_j^2}$. La comparaison de (2.23) et de la décomposition en fraction rationnelle (2.15) montre immédiatement que si Γ est diagonale, les modes complexes et normaux sont proportionnels avec

$$\forall k \neq j \quad \Gamma_{jk} = 0 \quad \Rightarrow \quad \{\psi_j\} = \{\phi_j\} / \sqrt{-2i\text{Im}(\lambda_j)} \quad (2.24)$$

2.1.5. Multiplicité, réciprocity et autres propriétés des structures

Il découle de la décomposition (2.15) que les matrices de résidus liées à un mode complexe unique ont la forme

$$[R_j]_{N_s \times N_A} = \{c\psi_j\}_{N_s \times 1} \{\psi_j^T b\}_{1 \times N_A} \quad (2.25)$$

où le produit du vecteur colonne d'observabilité modale $\{c\psi_j\}$ par le vecteur ligne de contrôlabilité modale $\{\psi_j^T b\}^T$ est de rang 1. Les vecteurs propres étant forcément uniques, une matrice résidu de rang supérieur correspond à un pôle multiple (plus d'un vecteur propre associé à une seule valeur propre).

En pratique, les structures réelles ne présentent jamais de fréquences parfaitement multiples. Même des structures conçues comme axisymétriques ne respectent pas une symétrie parfaite et les fréquences théoriquement doubles sont légèrement séparées. Selon le degré de dissymétrie il est possible ou non de distinguer expérimentalement les deux pôles. Dans tous les cas où le test permet de construire une matrice de résidus d'ordre supérieur ou égal à la multiplicité réelle, il est possible déterminer une base orthogonale du sous-espace engendré par les modes (voir exemples en section 3.2.1).

De nombreux tests sont théoriquement censés vérifier le principe de réciprocity. On est donc souvent amené à créer un modèle réciproque ou à utiliser cette propriété pour obtenir des prédictions de FRF non mesurées.

Pour un modèle du second ordre réciproque dont les matrices M, C, K sont symétriques, les matrices d'entrée b et de sorties c décrivant des forces et des déplacement duaux (tels que le produit $u\dot{y}$ est la puissance injectée) sont transposées l'une de l'autre $b = c^T$.

Pour de tels modèles, l'utilisation de matrices symétriques conduit à l'égalité des modes propres gauches et droits. De plus pour toute fonction de transfert collocalisée (entrée et sortie duaux), on a la relation d'égalité entre entrée et sortie modale

$$b_{Col}^T \Psi_j = c_{Col} \Psi_j = \sqrt{R_{jCol}} \quad (2.26)$$

On note l'existence d'une relation similaire pour les modes normaux ϕ .

Une structure passive dissipant toujours de l'énergie, toute fonction de transfert collocalisée doit être positive ($\text{Re}(s u(s)y(s)) \geq 0$). Pour un modèle du second ordre, dont les matrices sont symétriques la masse strictement définie positive et la raideur semi-définie positive, une matrice d'amortissement semi-définie positive suffit à garantir cette propriété. Pour un modèle dans la forme de fraction rationnelle, on peut théoriquement choisir les excitations de manière à isoler la réponse d'un seul mode. Il faut donc garantir que

$$\text{Re} \left(\frac{[c \Psi_j \Psi_j^T c] s}{s - \lambda_j} + \frac{\overline{[c \Psi_j \Psi_j^T c] s}}{s - \bar{\lambda}_j} \right) > 0 \quad \forall j, [c] \text{ et } s = i\omega \quad (2.27)$$

On peut alors traduire la condition (2.27) en des conditions sur les résidus $R_j = c \Psi_j \Psi_j^T c$. La condition de positivité est d'emploi assez rare en analyse modale expérimentale. Elle est cependant essentielle pour la conception de systèmes de dissipation active dont la robustesse est souvent basée sur cette propriété [and3]. Dans les applications pratiques, la dynamique des capteurs et actionneurs conduit toujours à une positivité limitée en fréquence ce qui limite la dissipation maximale réalisable.

2.2. Modèles mécaniques dissipatifs

2.2.1. Modèles et modèles équivalents de dissipation

L'application même assez grossière de principes physiques montre que l'amortissement lié aux vibrations de nombreux matériaux ou éléments structuraux est une fonction complexe de la fréquence, la température, le type de déformation, l'amplitude, la géométrie, etc. De plus, l'amortissement lié à des éléments non modélisés (instruments, câblages électriques, parties de circuits hydrauliques, jonctions supposées parfaites, etc.) est souvent prédominant. Sauf pour des structures particulièrement simples, les modèles dissipatifs sont donc liés à l'utilisation de lois de comportement ou de modèles discrets fortement simplifiés. Les seuls vrais critères de validation de ces modèles sont la similitude avec le comportement expérimental et la simplicité d'utilisation.

La réponse amortie d'une structure viscoélastique linéaire est parfaitement caractérisée par la donnée des fonctions de transfert (raideur ou flexibilité dynamique dans les applications considérées ici). Pour un système non linéaire (de nombreux phénomènes dissipatifs, frottements de Coulomb, plasticité, chocs, etc., le sont), il n'y a pas de fonction de transfert puisque le rapport entrée / sortie dépend de l'amplitude. Pour une amplitude donnée, les réponses harmoniques donnent cependant une information similaire à celle des fonctions de transfert. Il est donc usuel de construire une représentation viscoélastique équivalente à une réponse non linéaire en supposant

qu'une réponse harmonique mesurée ou prédite correspond à la fonction de transfert d'une structure viscoélastique équivalente [inm1].

Pour les matériaux, les modèles rhéologiques les plus usités pour les constantes viscoélastiques sont montrés en figure 2.3 (voir Refs. [ber7,sal2] pour d'autres exemples).

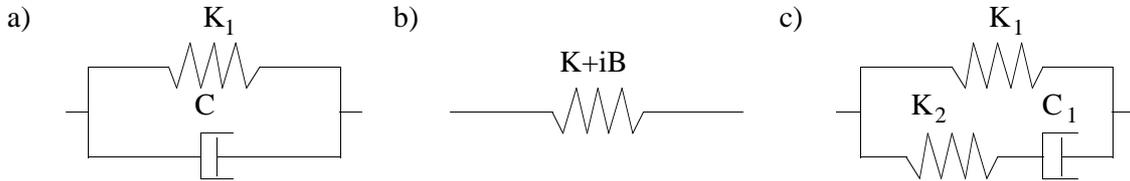


Fig. 2.3: Modèles rhéologiques de solides amortis: a) amortissement visqueux, b) raideur complexe (amortissement structural), c) solide viscoélastique standard (amortissement viscoélastique).

La figure 2.4 montre l'évolution en fonction de la fréquence des modèles rhéologiques de la figure 2.3. Les amplitudes correspondent à une raideur (rapport entre amplitude de la contrainte et amplitude de la déformation) et les phases à un taux de perte (énergie dissipée par cycle). Le modèle visqueux est dominé à basse fréquence par la raideur (pas de dissipation) et à haute fréquence par l'amortissement (dissipation tend vers l'infini). Le modèle de raideur complexe donne une dissipation indépendante de la fréquence, ce qui est une bonne approximation pour de nombreux matériaux ou liaisons (soudures, rivets, boulons). Pour de nombreux polymères cependant, la dépendance à la fréquence est significative et seuls des modèles plus complexes comme celui du solide viscoélastique standard permettent une représentation correcte.

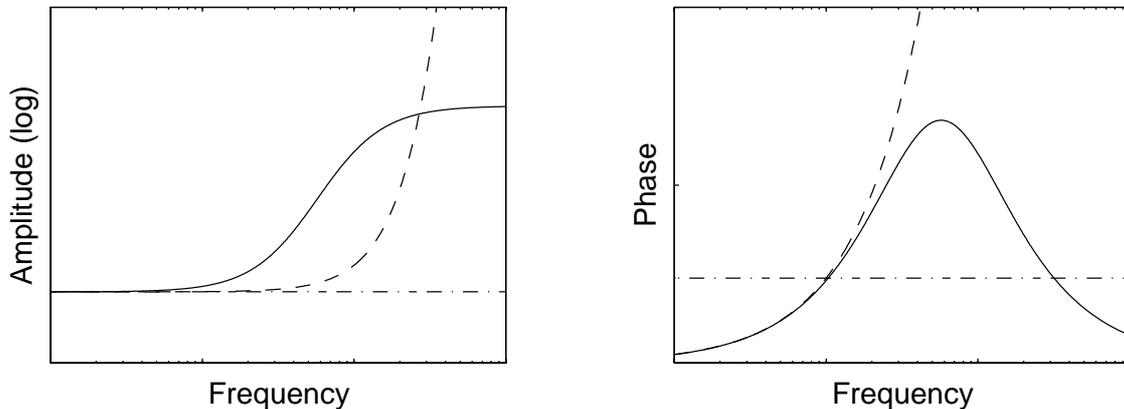


Fig. 2.4: Raideurs dynamiques associées aux modèles rhéologiques standards (figure 2.3). Amortissement (---) visqueux (·-·) structural (—) viscoélastique

De telles lois de comportement, généralement déterminées par des essais très précis sur des éprouvettes, peuvent être ensuite utilisées dans le cadre de prédictions élément fini. Les modèles résultants ont la forme générale du second ordre

$$\begin{aligned} [Ms^2 + Cs + K + iB]\{q\} &= [b]\{u\} \\ \{y\} &= [c]\{q\} \end{aligned} \quad (2.28)$$

où l'on distingue dans la raideur dynamique une partie réelle liée aux contributions de masse et de raideur ($Ms^2 + K$) et une partie imaginaire combinant les divers effets de dissipation ($Cs + iB$). Selon les lois de comportement, les matrices dites de raideur K , d'amortissement visqueux C et d'amortissement structural B sont constantes ou dépendent de la fréquence.

Comme on l'a vu dans la section 2.1, les systèmes dynamiques ne sont caractérisés que par la relation entre entrées u et sorties y . Du point de vue de la modélisation dynamique, on ne peut donc distinguer des amortissements visqueux et structuraux dépendant de la fréquence puisque seule la somme $Cs + iB$ intervient dans le modèle.

Même pour des matrices constantes, la distinction entre les différentes formes d'amortissement peut être difficile. Prenons l'exemple d'un système masse/ressort où la raideur du ressort suivrait les modèles rhéologiques de la figure 2.3. Pour les valeurs paramétriques de la figure 2.4, on choisit la masse de manière à placer la résonance à la fréquence où les trois modèles de la figure 2.4 ont le même niveau de dissipation. Les réponses en amplitude et phase des trois modèles sont alors presque identiques. Seul le modèle viscoélastique a une transition de phase légèrement décalée (visible par la position différentes de points sur le diagramme de Nyquist). Pour ce cas simple, les modèles à amortissement visqueux et structural sont donc presque parfaitement équivalents.

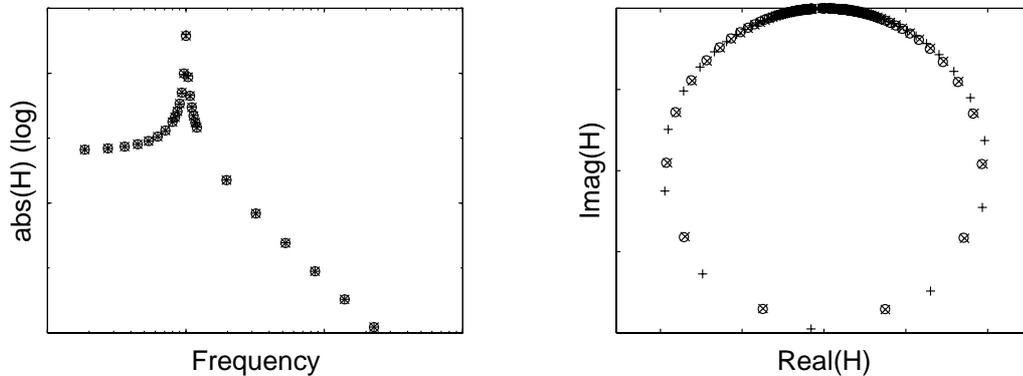


Fig. 2.5: Flexibilité dynamique d'un système masse ressort dont les raideurs sont associées aux modèles rhéologiques de la figure 2.3. Amortissement (x) visqueux (o) structural (+) viscoélastique.

Les modèles de la forme (2.28) sont utilisés pour des modèles élément fini complets, des modèles expérimentaux, et des modèles élément fini projetés sur la base des modes normaux ou plus généralement sur une base de réduction (on parle alors de modèle réduit, voir section 4.1).

Pour un modèle élément fini, les matrices de dissipation utilisées sont liées à des choix de loi de comportement. Le modèle le plus couramment utilisé est un amortissement structural proportionnel à la raideur (module d'Young complexe pour un loi de comportement isotrope). Pour un modèle expérimental, le choix de la manière de

représenter l'amortissement est généralement arbitraire. Pour des structures présentant des modes peu amortis, il y a ainsi, comme pour l'exemple masse ressort, des représentations presque équivalentes dans chaque forme.

Pour un modèle réduit, la représentation initiale du modèle élément fini peut être directement projetée. On se retrouve alors avec un modèle très proche des modèles expérimentaux et il devient possible de construire des représentations équivalentes d'un autre type. Ainsi un modèle avec un amortissement structural de 2% ($[B] = 2i[K]/100$) et un modèle avec un amortissement modal de 1% ($[\Gamma] = [\phi^T C \phi] = (2[\Omega])/100$) sont associés aux décompositions spectrales

$$H = \sum_{j=1}^N \frac{c\phi_j\phi_j^T b}{-\omega^2 + 2i\omega_j^2/100 + \omega_j^2} \quad \text{et} \quad H = \sum_{j=1}^N \frac{c\phi_j\phi_j^T b}{-\omega^2 + 2i\omega\omega_j/100 + \omega_j^2} \quad (2.29)$$

dont les réponses sont très proches. Aux résonances ($\omega = \omega_j$) on a en effet $\omega\omega_j = \omega_j^2$. L'amortissement modal souvent utilisable pour un modèle réduit n'est pas raisonnable pour un modèle élément fini initial, la matrice d'amortissement visqueux liée à un amortissement modal constant pour tous les modes est en effet donnée par

$$C = 2[M\phi\Omega\phi^T M]/100 \quad (2.30)$$

qui est généralement une matrice pleine. Or le principe de la méthode des éléments finis est de ne pas prendre en compte des couplages entre éléments disjoints. Ce modèle visqueux ne pourrait donc être le résultat de l'assemblage de matrices d'amortissement visqueuses élémentaires. On note cependant qu'un modèle à amortissement structural n'a pas d'expression temporelle simple. Même dans les cas un amortissement structural est utilisé initialement on est donc amené à le représenter par un amortissement visqueux équivalent.

La dissipation est par ailleurs souvent liée à des éléments non modélisés (liaisons supposées parfaites, habillage de la structure, etc.). Il est donc souvent difficile de construire un modèle d'amortissement à partir de données sur les propriétés géométriques et matérielles de la structure. Pour obtenir un modèle dissipatif précis il est alors indispensable de tester la structure et de combiner informations sur les propriétés géométriques et élastiques (traduit en un modèle de masse et de raideur) et informations expérimentales sur la dissipation (voir section 4.4).

On note aussi dans ce cadre, que l'existence de plusieurs formes équivalentes du modèle de dissipation indique que le problème inverse de détermination des propriétés locales d'amortissement est mal posé et ne peut être résolu que dans des cas simples où la forme du modèle d'amortissement est déterminée a priori (comme dans [rei1] par exemple).

La dépendance à la fréquence des lois de comportement est importante pour de nombreuses applications: blocs polymères utilisés pour l'isolation (pales de turbines ou d'hélicoptères, support de moteur de voiture, de berceaux de machine dans les sous-marins ou les satellites [dav2]), structures à matériaux viscoélastique distribué (propergols [pie4], tôles sandwich pour les carrosseries [bla3], sable [bal22]), etc.

La prise en compte de cette dépendance peut être faite à l'aide de lois de comportement paramétriques (du type modèle standard à 3 paramètres montré en

figure 2.3) ou non paramétriques (donnée d'un module complexe à chaque fréquence). Les modèles paramétriques polynomiaux (modèle à trois paramètres ou plus) peuvent être assez facilement traités par une extension d'éléments finis classiques [les1]. Les principales limitations de cette approche sont le nombre de DDL additionnels et le coût de développement d'éléments spécifiques à chaque forme de loi de comportement viscoélastique.

Pour des modèles plus complexes, comme les dérivées fractionnaires [bag1], ou des modèles non paramétriques, le problème est facile à traiter dans le domaine fréquentiel (l'utilisation de modules complexes ne changeant pas les procédures) et difficile dans le domaine temporel (il s'agit alors de construire des modèles temporels équivalents [pie4]). Pour une structure non homogène, le calcul fréquentiel demande de réaliser un assemblage et un calcul de réponse à chaque point de fréquence, les coûts de calcul sont donc rapidement exorbitants. Des approches de réduction de modèle rendant le calcul possible sont considérées dans le chapitre 5 (et en Ref. [bal22]).

2.2.2. Modèle du second ordre complet et flexibilité résiduelle

On est très souvent amené à supposer que la réponse d'un groupe G de modes peut être précisément représentée par un modèle du second ordre soit

$$\{y\} = \left([c_G] [M_G s^2 + C_G s + K_G]^{-1} [b_G] + [\alpha_R(s)] \right) \{u\} = \left([\alpha_G(s)] + [\alpha_R(s)] \right) \{u\} \quad (2.31)$$

La réponse des modes retenus est représentée par un modèle du second ordre, on parle généralement de **modèle complet** [ses1]. La flexibilité résiduelle $\alpha_R(s)$ est associée aux modes non retenus et les représentations possibles ont été abordées en section 2.1.1.

Des modèles complets ne comprenant que des modes basse fréquence peuvent être déterminés à partir de données expérimentales ou par projection d'un modèle élément fini détaillé (section 4.1). Comme indiqué dans la section précédente, il est usuel pour de tels modèles d'utiliser une représentation visqueuse de l'amortissement même si cette représentation n'est qu'un équivalent pour les chargements et la bande de fréquence considérée de l'amortissement réel. La section 2.2.3 considère différentes simplifications du modèle visqueux et la section 2.2.4 traduit ces hypothèses en propriété des modes complexes associés.

2.2.3. Amortissement proportionnel et proportionnel par bloc

Si le modèle initial est du second ordre, l'existence de la forme (2.31) implique clairement qu'en coordonnées principales (associées aux modes normaux) l'amortissement ne couple pas les modes du groupe G avec les autres ($\Gamma_{GR} = \Gamma_{RG}^T = 0$)

$$\{y\} = [c_G \phi_G \quad c_R \phi_R] \left(\left[\begin{array}{c|c} I & \\ \hline & I \end{array} \right] s^2 + \left[\begin{array}{c|c} \Gamma_G & 0 \\ \hline 0 & \Gamma_R \end{array} \right] s + \left[\begin{array}{c|c} \Omega_G^2 & \\ \hline & \Omega_R^2 \end{array} \right] \right)^{-1} \left[\begin{array}{c} \phi_G^T b_G \\ \phi_R^T b_R \end{array} \right] \{u\} \quad (2.32)$$

Le cas extrême de cette hypothèse est un découplage de chaque mode par rapport à tous les autres : la matrice Γ est diagonale, chaque mode forme un modèle complet, on considère un amortissement par blocs de 1 mode. On parle alors d'**amortissement**

modal et cette hypothèse, souvent utilisée dans le cadre expérimental, est en France attribuée à **Basile**.

D'un point de vue analytique, l'hypothèse Γ diagonal est équivalente à l'existence d'un modèle d'amortissement particulier qui peut toujours se mettre sous la forme proposée par *Caughey*

$$C = \sum_{k=1}^N \alpha_k M (M^{-1} K)^{k-1} \quad (2.33)$$

La cas le plus simple de cette forme ($k=1,2$) correspond au modèle proposé par *Rayleigh* $C = \alpha M + \beta K$ d'où l'appellation **amortissement proportionnel** souvent utilisée pour Γ diagonal. Dans le modèle de *Rayleigh*, on a des amortissements très élevés à basse fréquence (à cause du terme α) et à haute fréquence (à cause du terme β) [ger3]. Si la bande de fréquence d'intérêt est assez large, il peut être impossible d'obtenir des pôles avec des taux d'amortissement similaires à ceux rencontrés expérimentalement. Cette limitation est une motivation usuelle pour utiliser dans le cadre élément fini une raideur complexe (amortissement structural) qui conduit à des niveaux d'amortissement constants.

Il n'y a que rarement des raisons physiques conduisant à trouver $\Gamma_{GR} = \Gamma_{RG}^T = 0$. Il se trouve cependant que l'influence des termes non diagonaux est souvent négligeable. Pour s'en convaincre, on considère l'interaction entre deux modes normaux

$$\left(\begin{bmatrix} I & \\ & I \end{bmatrix} s^2 + \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & \\ & \omega_2^2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u \quad (2.34)$$

et exprime la réponse du mode 1 décrite par la coordonnée p_1

$$p_1 = \left(I - \underbrace{\left[\frac{\gamma_{12} \gamma_{21} s^2}{(s^2 + \gamma_{11} s + \omega_1^2)(s^2 + \gamma_{22} s + \omega_2^2)} \right]}_{\text{COUPLAGE}} \right)^{-1} \times \quad (2.35)$$

$$\times \frac{b_1 u}{(s^2 + \gamma_{11} s + \omega_1^2)} + \underbrace{\frac{\gamma_{12} s b_2 u}{(s^2 + \gamma_{11} s + \omega_1^2)(s^2 + \gamma_{22} s + \omega_2^2)}}_{\text{TERME CROISE}}$$

On distingue dans cette réponse un terme de couplage et un terme d'excitation croisée. Pour deux modes vérifiant la condition de séparation des résonances suivante (proposée par *Hasselmann* [has4])

$$2\zeta_j \omega_j / |\omega_j - \omega_k| \ll 1 \quad (2.36)$$

on montre que

$$\left| \frac{\gamma_{12} \gamma_{21} s^2}{(s^2 + \gamma_{11} s + \omega_1^2)(s^2 + \gamma_{22} s + \omega_2^2)} \right| \ll \frac{\gamma_{12} \gamma_{21}}{\gamma_{11} \gamma_{22}}. \quad (2.37)$$

Cette inégalité combinée avec la condition de positivité de la matrice d'amortissement ($\gamma_{12} \gamma_{21} / \gamma_{11} \gamma_{22} \leq 1$) indique (sans restriction contrairement à ce que disait *Hasselmann*) que le terme de couplage dans (2.35) est très proche de 1 et donc que la modification de l'état p_1 liée au coefficient γ_{12} est négligeable.

Un deuxième couplage est lié à l'excitation du mode 2 (terme croisé dans (2.35)). Ce terme n'est comparable au terme principal en b_1 que si le mode 1 est très peu excité. Mais dans ce cas la réponse du mode 1, précise ou pas, n'a que peu d'influence sur la réponse globale. L'influence de l'amortissement non proportionnel peut donc encore être négligée.

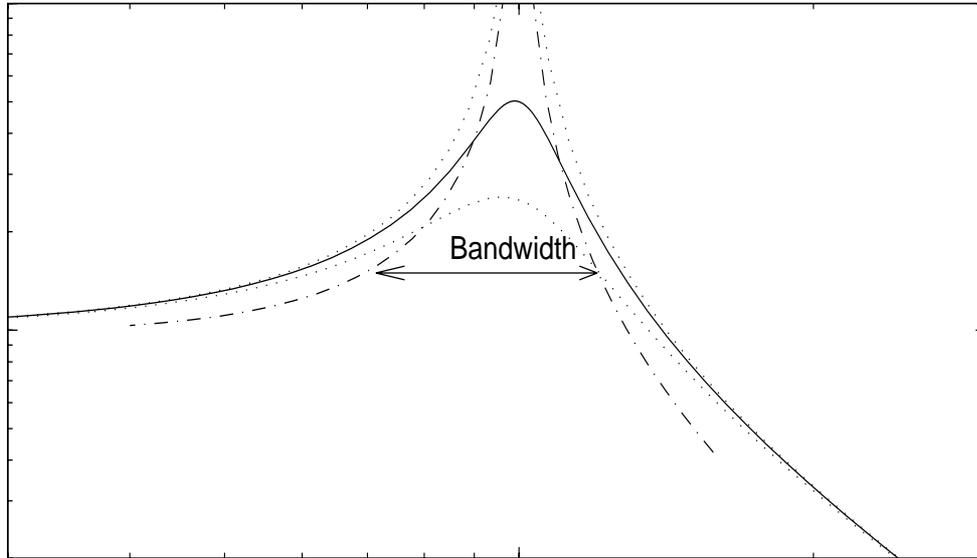


Figure 2.6: Réponse d'un mode normal. Les effets liés à l'amortissement ne sont sensibles que dans une bande passante réduite (· · ·) centrée sur ω_j et de largeur $\gamma_{jj} = 2\zeta_j\omega_j$. Deux modes ne peuvent interagir fortement que si leurs bandes passantes se recouvrent.

Les effets de termes non diagonaux de la matrice d'amortissement peuvent donc être négligés si les bandes passantes (voir figure 2.6) des deux modes ne se recouvrent pas. Même pour des structures à amortissement faible, le critère de séparation (2.36) n'est généralement pas vérifié par tous les modes. Il convient donc de considérer au moins les couplages entre modes proches. Ceci conduit à l'introduction de l'hypothèse d'amortissement proportionnel par bloc (Γ diagonal par bloc, chaque groupe de modes est associé à un modèle complet) qui a été utilisée pour l'identification d'une matrice d'amortissement [bal10] et la synthèse modale de réponses amorties à partir de modèles de composants [bal12].

2.2.4. Modes complexes d'un modèle complet à amortissement visqueux

Pour un modèle complet, associé à tous les modes connus ou un sous-groupe seulement, la forme du second ordre implique clairement que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} (s[\mathbf{\alpha}_G(s)]) = \lim_{s \rightarrow \infty} (s[c_G][M_G s^2 + C_G s + K_G]^{-1}[b_G]) = 0 \quad (2.38)$$

On peut par ailleurs calculer les modes complexes (2.11) correspondant au modèle G . Le passage à la limite dans la forme de fraction rationnelle (2.15) et l'utilisation de la condition (2.38) donne alors

$$\lim_{s \rightarrow \infty} (s[\alpha_G(s)]) = \sum_{j=1}^{2N} \{c_G \psi_{jG}\} \{b_G^T \psi_{Gj}\}^T = [c_G] [\psi_G \psi_G^T] [b_G] = 0 \quad (2.39)$$

Cette condition étant vraie pour b_G et c_G arbitraires, on a donc

$$[\psi_G]_{NG \times 2NG} [\psi_G]_{2NG \times NG}^T = [0]_{NG \times NG} \quad (2.40)$$

En automatique, les modèles dont la forme polynomiale a un numérateur d'ordre inférieur à celui du dénominateur sont dits propres. On a ici utilisé le fait que le transfert force/vitesse est propre pour un modèle du second ordre.

Des conditions nécessaires et suffisantes d'orthogonalité (2.13) pour les modes complexes d'un modèle du second ordre, on tire facilement deux expressions équivalentes

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} 0 & M^{-1} \\ M^{-1} & -M^{-1}CM^{-1} \end{bmatrix} = \theta \theta^T = \begin{bmatrix} \psi \psi^T & \psi \Lambda \psi^T \\ \psi \Lambda \psi^T & \psi \Lambda^2 \psi^T \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} K^{-1} & 0 \\ 0 & -M^{-1} \end{bmatrix} = -\theta \Lambda^{-1} \theta^T = -\begin{bmatrix} \psi \Lambda^{-1} \psi^T & \psi \psi^T \\ \psi \psi^T & \psi \Lambda \psi^T \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.41)$$

De l'équivalence entre (2.41) et les conditions d'orthogonalité, on déduit que tout groupe de $2N$ modes complexes ψ vérifiant la condition de propreté (2.40) forme l'ensemble des vecteurs propres d'un modèle du second ordre dont les matrices sont données par

$$M = (\psi \Lambda \psi^T)^{-1}, \quad C = -M \psi \Lambda^2 \psi^T M, \quad \text{et} \quad K = -(\psi \Lambda^{-1} \psi^T)^{-1} \quad (2.42)$$

Il découle de ce résultat que les hypothèses de complétude (2.31), d'amortissement proportionnel par bloc (2.32) et de propreté (2.40) sont équivalentes. L'exploitation de cette équivalence pour l'identification d'un modèle d'amortissement non proportionnel (plus précisément proportionnel par bloc pour des blocs comprenant plus d'un mode) est un résultat novateur du travail exposé (voir section 3.2.3 et [bal10]).

On vérifie facilement que si le modèle ne contient qu'une paire de modes conjugués, la condition de propreté (2.40) implique

$$\text{Re}(R_j) = \text{Re}(\{c \psi_j\} \{b^T \psi_j\}^T) = c \text{Re}(\psi_j \psi_j^T) b = 0 \quad (2.43)$$

L'hypothèse d'amortissement proportionnel est donc équivalente à l'utilisation de modes complexes dont le résidu est purement imaginaire. En réalité, la partie réelle du résidu n'est négligeable que pour des amortissements faibles et des modes bien séparés en fréquence. Un amortissement proportionnel par bloc permet de représenter un plus grand nombre de cas qu'un amortissement proportionnel pour chaque mode. Pour des amortissements forts, il peut cependant être impossible de trouver un modèle complet du deuxième ordre représentant bien la réponse.

2.3. Commentaires sur la notion d'erreur

L'erreur est la différence entre une quantité vraie et son estimation. L'estimation de l'erreur demande la possibilité de comparer différentes estimations d'une quantité qui doit être définie indépendamment de la méthode utilisée pour l'estimation. Dans le cadre de ce mémoire, les quantités considérées sont les fonctions de transfert, les modes, et les propriétés géométriques et élastiques. Pour les problèmes directs, les propriétés géométriques et élastiques sont données et on suppose ici pouvoir construire un modèle élément fini précis de toute structure.

2.3.1. Modèles non paramétriques de fonctions de transfert

Dans toutes les études sur la réponse dynamique de systèmes linéaires invariants dans le temps, l'hypothèse fondamentale est l'existence de fonctions de transfert reliant entrées et sorties

$$\{y(s)\} = [H(s)]\{u(s)\} \quad (2.44)$$

Ces fonctions de transfert peuvent être représentées de manière équivalente dans le domaine temporel par des réponses impulsionnelles ou des séries de paramètres de Markov.

L'estimation de fonctions de transfert est un problème classique de traitement du signal (voir entre autres [lju1,mcc2,ewi1]). En dynamique, seule la réponse temporelle à une excitation ambiante ou pilotée par l'utilisateur peut être mesurée directement. Le signal est mesuré par des capteurs imparfaits. Il n'est généralement lié à la grandeur physique d'intérêt que pour une gamme de fréquences et d'amplitudes limitées. Il est de plus bruité, filtré et généralement numérisé. Seule une connaissance partielle de la réponse réelle (grandeur mécanique d'intérêt) est donc possible.

Les bruits de mesures et de processus (excitations parasites) introduisent une incertitude sur la réponse réelle. Pour la plupart des cas rencontrés en dynamique des structures, un traitement statistique des mesures permet de réduire cette incertitude à des niveaux suffisamment bas pour que d'autres erreurs aient une influence prépondérante.

Pour les applications considérées ici, on retiendra essentiellement, que la réponse ne peut être estimée de manière valide que pour un nombre discret de points de fréquences sur une bande limitée par l'électronique de traitement du signal ainsi que par les propriétés mécaniques des capteurs. On appelle **modèle non paramétrique** la donnée de certaines fonctions de transfert en un nombre fini de points de fréquence.

En supposant qu'il existe un modèle linéaire exact, on peut représenter l'erreur du modèle courant sous forme de contributions additives et/ou multiplicatives telles que (voir figure 2.7 pour une représentation en diagramme bloc)

$$[H(s)] = [I + L_L(s)][H_M(s) + H_R(s)][I + L_R(s)] \quad (2.45)$$

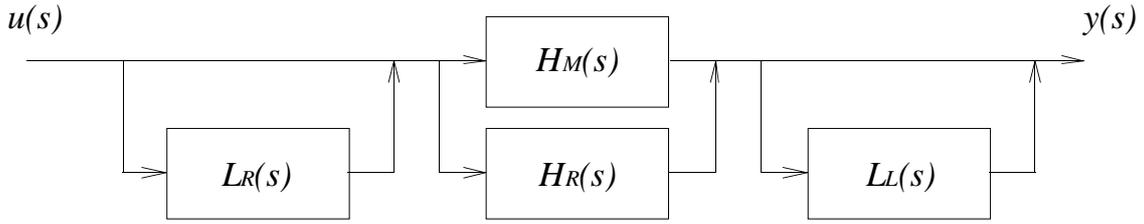


Fig. 2.7: contributions additives et multiplicatives à l'erreur.

L'utilisation d'erreurs additives et/ou multiplicatives bien qu'a priori arbitraire est souvent dictée par le type d'erreur représentée. Ainsi un bruit non corrélé sur la mesure de l'entrée, conduit pour l'estimateur H_I [mcc2] (utilisé pour la détermination expérimentale de fonctions de transfert) à une erreur donnée sous la forme multiplicative

$$H_I/H = 1/(1 + G_m(s)/G_{uu}(s)) \quad (2.46)$$

où $G_m(s)$ est le spectre du bruit non corrélé et $G_{uu}(s)$ celui de l'entrée réelle.

De même, les effets liés au comportement non idéal d'un capteur (fonction de transfert non constante entre grandeur estimée et signal mesuré) ou aux délais temporels d'une chaîne de mesure sont généralement facilement représenté par une erreur multiplicative.

Pour un raffinement inclusif d'un modèle analytique (le modèle raffiné contient le modèle initial associé aux DDL I), on peut plus facilement écrire la différence entre modèle initial et modèle raffiné sous la forme additive suivante

$$H = \begin{bmatrix} c_I & c_C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{II} & K_{IC} \\ K_{CI} & K_{CC} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_I \\ b_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{II}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H_R \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

où la différence est donnée par

$$\begin{bmatrix} H_R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_I \\ c_C \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -K_{II}^{-1}K_{IC} \\ I \end{bmatrix} (K_{CC}^{-1} - K_{CI}K_{II}^{-1}K_{IC})^{-1} \begin{bmatrix} -K_{II}^{-1}K_{IC} \\ I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} b_I \\ b_C \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Les différentes représentations de l'erreur conduisent à des critères de comparaison de modèles. Pour des modèles caractérisés par la donnée de leur fonctions de transfert (matrice H avec autant de lignes que de points de fréquence et de colonnes que de fonctions de transfert).

On notera ainsi le critère quadratique classique lié à une représentation additive de l'erreur

$$J(H_1, H_2) = \text{trace} \left(\begin{bmatrix} H_1 - H_2 \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} H_1 - H_2 \end{bmatrix} \right) \quad (2.49)$$

et le critère logarithmique lié à une représentation multiplicative

$$J(H_1, H_2) = \text{trace} \left(\begin{bmatrix} \log \left(\frac{H_1}{H_2} \right) \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} \log \left(\frac{H_1}{H_2} \right) \end{bmatrix} \right) \quad (2.50)$$

La différence entre deux modèles peut être représentée soit de manière additive soit de manière multiplicative. La mesure de cette différence par un critère associé à la représentation choisie peut varier de manière significative d'un critère à l'autre. Ainsi,

les modèles 1 et 3 de la figure 2.8 sont, par rapport à la comparaison des modèles 1 et 2, plus éloignés d'un facteur 5 pour le critère additif (2.49) et plus proches d'un facteur 5 pour le critère multiplicatif (2.50).

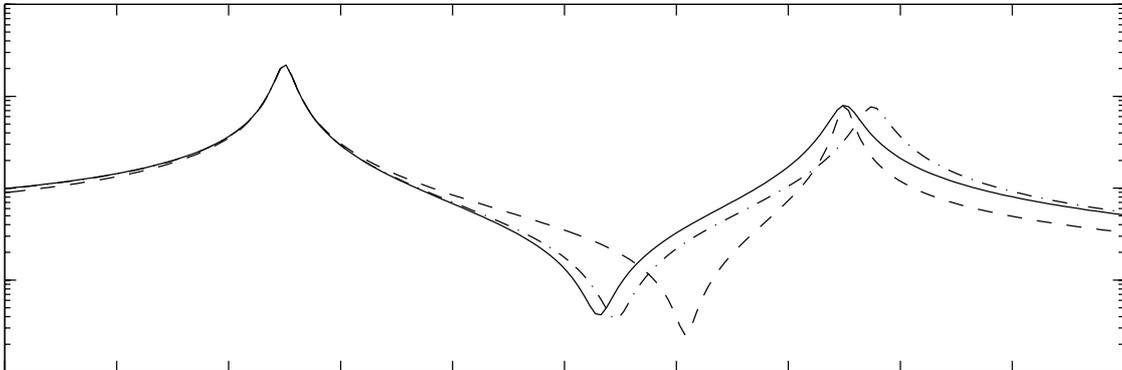


Fig. 2.8: Modèles non paramétriques comparables de trois fonctions de transfert. Modèle (—) 1, (---) 2, (-·-) 3.

Le modèle 2 est assez typique d'une erreur d'identification à partir de données expérimentales. Pour un pôle dont l'amortissement est inexact, l'estimation du résidu est généralement biaisée de manière à conserver le niveau de réponse au niveau du maximum de réponse. Le modèle 3 est lui assez typique d'une erreur liée à un modèle élément fini. On a une erreur de 2% sur la fréquence mais l'estimation du résidu est correcte.

Pour une application en identification, le modèle 2 est donc qualitativement plus proche que le modèle 3 car, pour des structures faiblement amorties, il est facile de déterminer les fréquences expérimentales avec une très grande précision. Pour la comparaison d'un modèle élément fini avec des résultats expérimentaux, des erreurs de quelques pour cents sur les fréquences sont attendues alors que les résidus généralement basés sur le modèle non amorti ne peuvent compenser les erreurs du modèle d'amortissement. Le modèle 3 est donc qualitativement meilleur que le modèle 2.

Pour l'identification (détermination de paramètres modaux à partir de données expérimentales) le critère additif (2.49) paraît donc plus adapté (voir applications [bal4,bal19]), alors que pour la corrélation calculs/essais c'est le critère multiplicatif (2.50) (voir par exemple [bal7]). Le critère additif (2.49) étant souvent choisi pour ses propriétés mathématiques (c'est une forme quadratique), son utilisation dans le cadre de la corrélation calculs / essais demande de prendre en compte le fait que des erreurs de l'ordre du pour cent sur les fréquences sont faibles (par exemple en sélectionnant des fréquences éloignées des résonances [zim3]). On notera aussi que des critères combinant les réponses à plusieurs fréquences semblent aussi très prometteurs [cog1].

2.3.2. Erreur sur les propriétés modales

Plutôt que de comparer deux modèles à l'aide de fonctions de transfert, il est possible de comparer leurs modes. Ces comparaisons ont souvent pour objectif la validation ou le recalage d'un modèle élément fini. Ce dernier étant en général un

modèle conservatif, on s'intéresse essentiellement à des comparaisons des propriétés liées aux modes normaux.

Les critères classiques commencent bien sûr par une comparaison des pôles ou plutôt des fréquences. On pourra ainsi évaluer une erreur moyenne pour un certain nombre de modes

$$J = \sum_j |\omega_{j1} - \omega_{j2}|^2 \quad (2.51)$$

Une difficulté essentielle, dès que l'erreur est significative et/ou que la densité modale est grande, est la nécessité d'appairer les modes (définir la fréquence d'indice j). Cet appairage peut en particulier être réalisé à partir de critères de comparaison des déformées (voir [roy3] par exemple).

Le plus simple et le plus utilisé des critères de comparaison des déformées modales est le MAC (Modal Assurance Criterion) donné par

$$MAC_{jk} = \frac{\sum_l c_l \phi_j c_l \phi_k}{\sqrt{\sum_l (c_l \phi_j)^2 \sum_l (c_l \phi_k)^2}} \quad (2.52)$$

qui mesure la corrélation entre les formes modales mesurées en un certain nombre de points c_l . Le MAC, mesurant une corrélation, ne garanti pas l'égalité et ne prend pas en compte l'échelle du vecteur (la masse généralisée). Bien qu'il soit souvent admis qu'un MAC au dessus de 0.9 soit bon, les différences entre deux vecteurs peuvent rester significatives au dessus de ce chiffre.

Pour donner une meilleur idée de l'erreur sur la masse généralisée, on préférera au MAC le facteur d'échelle pour les modes normalisés en masse

$$\left| \frac{(c\phi)_{j1}^T (c\phi)_{j2}}{(c\phi)_{j1}^T (c\phi)_{j1}} \right| \quad (2.53)$$

Ce critère donne une indication de la différence générale d'amplitude sur les deux vecteurs (si les déformées sont identiques le facteur d'échelle est une indication directe de l'erreur sur la masse généralisée). Le facteur d'échelle est censé être égal à 1. Une erreur de moins de 10% est généralement considérée comme très faible.

Une autre mesure extrêmement précise est l'erreur relative sur le mode normalisé en masse

$$\left\| \frac{(c\phi)_{j1} - (c\phi)_{j2}}{(c\phi)_{j1}} \right\| \quad (2.54)$$

Ce critère est extrêmement contraignant, des valeurs de l'ordre de 20% indiquent déjà des modes qui visuellement se superposent de manière très satisfaisante. Le même critère peut être considéré après mise à l'échelle à l'aide du facteur (2.53). Une diminution nette de l'erreur indique alors que la difficulté venait d'une mauvaise normalisation et non d'une forme différente (ceci peut arriver en particulier en présence d'une erreur sur l'amortissement).

Ces premiers critères ne prennent pas en compte les propriétés mécaniques de masse et de raideur ainsi que l'hypothèse que les déformées modales sont connues à tous les DDL. Ces critères imposent donc la réduction du modèle élément fini aux DDL mesurés (voir section 4.1) ou l'interpolation des réponses pour les DDL non mesurés

(on parle généralement d'expansion modale [oca2,roy3,smi2,lev7,hem2]).

Une première série de critères est basée sur la vérification des équations d'équilibre à la fréquence de résonance (les modes normaux sont par définition autoéquilibrés)

$$[-\omega_j^2 M + K] \{\phi_j\} = b_j = 0 \quad (2.55)$$

On remplace en général la fréquence et le mode propre par les résultats expérimentaux. Ce critère est particulièrement adapté à la détection de dommages / erreurs car les équations d'équilibre sont bien vérifiées dans les zones bien modélisées. Une norme euclidienne de la charge de déséquilibre b_j n'est cependant pas appropriée, car elle ne permet pas la prise en compte de l'inhomogénéité des propriétés de la structure et des unités des DDL. On utilisera donc la normalisation proposée en [kao1] ou la norme en énergie de déformation [bal21].

Il peut ainsi être intéressant de coupler les phases de comparaison et d'expansion, en considérant les DDL non mesurés comme des inconnues du problème [ber5]

$$\begin{bmatrix} K_{II}(\omega_{ID}) & K_{IC}(\omega_{ID}) \\ K_{CI}(\omega_{ID}) & K_{CC}(\omega_{ID}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{Test} \\ \phi_C \end{Bmatrix} \approx 0 \quad (2.56)$$

Une deuxième série de critères est basée sur les conditions d'orthogonalité des modes

$$[\phi]^T [M]_{N \times N} [\phi] = [I]_{N \times N} \quad \text{et} \quad [\phi]^T [K]_{N \times N} [\phi] = [\Omega^2]_{N \times N} \quad (2.57)$$

La qualité du modèle est estimée en mélangeant quantités expérimentales et analytiques et en voyant de quelle manière les équations (2.57) sont vérifiées. On peut par exemple considérer si

$$[\phi_{FE}^T]_{N_{FE} \times N} [M_{FE}]_{N \times N_{ID}} [\phi_{ID}]_{N_{ID} \times N_{ID}} \approx [I]_{N_{FE} \times N_{ID}} \quad \text{et} \quad [\phi_{FE}^T] [K_{FE}] [\phi_{ID}] \approx [\Omega^2]_{N_{FE} \times N_{ID}} \quad (2.58)$$

ou voir si les matrices de masse et raideur modales (aussi appelée énergies modales [roy4]) devraient être diagonales

$$[\mu_S]_{N_{ID} \times N_{ID}} = [\phi_{ID}^T] [M_{FE}] [\phi_{ID}] \quad \text{et} \quad [\Omega_S^2]_{N_{ID} \times N_{ID}} = [\phi_{ID}^T] [K_{FE}] [\phi_{ID}]. \quad (2.59)$$

sont diagonales.

Il est important de noter que les critères basés sur la comparaison des formes modales une à une ont un problème fondamental d'unicité lié à l'indétermination des vecteurs propres pour une valeur propre multiple. Prenons par exemple le système masse ressort de la figure 2.9a. Les courbes de la figure 2.9b montrent clairement que pour une variation de 10 % de k_3 , le MAC chute jusqu'à 0.4 alors que la fréquence varie de moins de 1%.

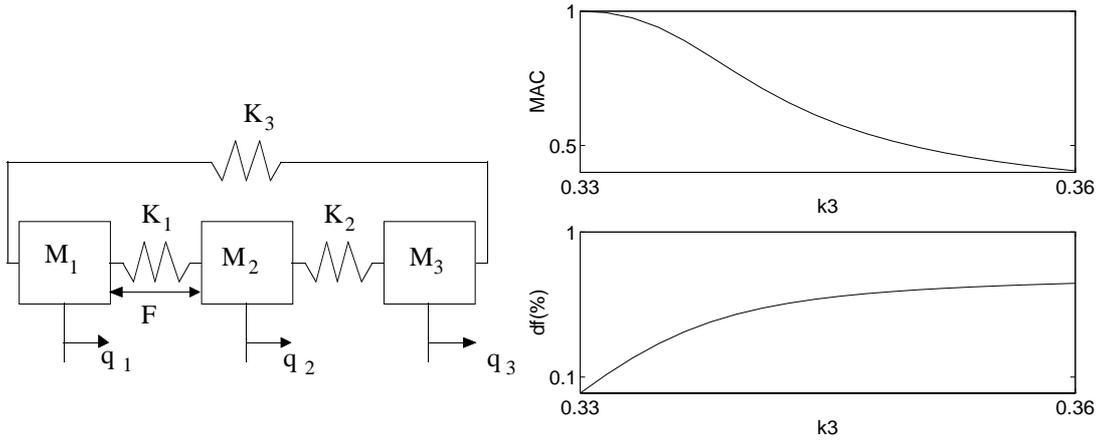


Fig. 2.9: a) Système masse ressort à symétrie cyclique [bal6]. b) Évolution du MAC et de l'erreur relative en fréquence pour la comparaison du premier mode flexible pour $m_j = 1, k_1 = .33, k_2 = 0.34, k_3 = 0.33$ avec celui obtenu pour $k_3 \in [0.33, 0.36]$.

Ce type de comportement est très typique (voir cas expérimentaux en [bal3, bal24] et analytiques en [bal6, bal17]). La comparaison de deux modes proches en fréquence devrait donc toujours se faire à l'aide de sous-espaces ou de mesures insensibles à la forte variabilité des modes. Les critères (2.55)-(2.59) sont appropriés mais demandent l'utilisation d'un modèle initial. D'un point de vue purement expérimental, il est cependant possible de considérer l'erreur sur le modèle normal

$$\begin{aligned} [(I + \Delta M)s^2 + (\Gamma + \Delta C)s + (\Omega^2 + \Delta K)]\{p\} &= [(b + \Delta b)]\{u\} \\ \{y\} &= [(c + \Delta c)]\{p\} \end{aligned} \quad (2.60)$$

Dans cette représentation de l'erreur $\Delta M, \Delta C$ et ΔK doivent être choisis de manière à minimiser Δb et Δc . Ceci implique en particulier que l'on ne doit pas imposer que ΔM et ΔK soient diagonaux (c'est à dire comparer des modèles en utilisant les coordonnées principales associées à chacun d'eux). On trouvera une discussion plus détaillée de ce problème en Ref. [bal3].

Une autre manière de voir ce résultat est de dire qu'il ne faut pas comparer des modes mais des modèles modaux d'une forme équivalente à (2.60) où les quantités caractérisées doivent être insensibles au choix des états. Une caractérisation insensible au choix des états ne donne aucune autre information que celle contenue dans les fonctions de transfert. La seule différence fondamentale entre la comparaison de modèles modaux et la comparaison de fonctions de transfert est donc liée aux contributions résiduelles. Comme indiqué en section 2.1.1 ces contributions permettent de représenter l'effet de modes non modélisés (car haute fréquence en général) dans la bande de fréquence considérée. On note que si ces contributions sont introduites dans le modèle (2.60) sous forme de modes non physiques, la comparaison des formes paramétriques de deux modèles modaux n'est plus immédiate.

2.3.3. Erreur sur les propriétés géométriques et élastiques

Les erreurs sur les propriétés géométriques et élastiques ne sont considérées dans ce mémoire que dans le cadre d'études sur le recalage. On suppose de plus qu'il est possible de créer un modèle élément fini représentatif de la structure considérée et que les erreurs sur les propriétés peuvent être caractérisées par un petit nombre de coefficients α .

Le recalage a pour objet de déterminer les coefficients d'un modèle paramétrique à partir d'une comparaison de prédictions $f(\alpha)$ avec des données mesurées f_{Test} directement comparables. En général on s'intéresse à des paramètres ayant une signification physique, le problème inverse devrait donc avoir une solution unique (un paramètre physique à une valeur unique). Les paramètres ne peuvent clairement être bien déterminés que si la transformation $\alpha \rightarrow f(\alpha)$ est non seulement bijective mais aussi bien conditionnée soit

$$\alpha_1, \alpha_2 \text{ proches} \Leftrightarrow f(\alpha_1), f(\alpha_2) \text{ proches} \quad (2.61)$$

Bien que le principe énoncé soit naturel, la définition des notions de proche est un problème majeur. Prenons le cas de l'interféromètre du MIT pour lequel on essaye de recalibrer les propriétés de raideur des joints de support d'instrumentation (joints modélisés par des éléments de poutre dont on fait varier la surface et les inerties de flexion) et des masses positionnées sur les miroirs ou distribuées sur les plaques (voir figure 2.10).

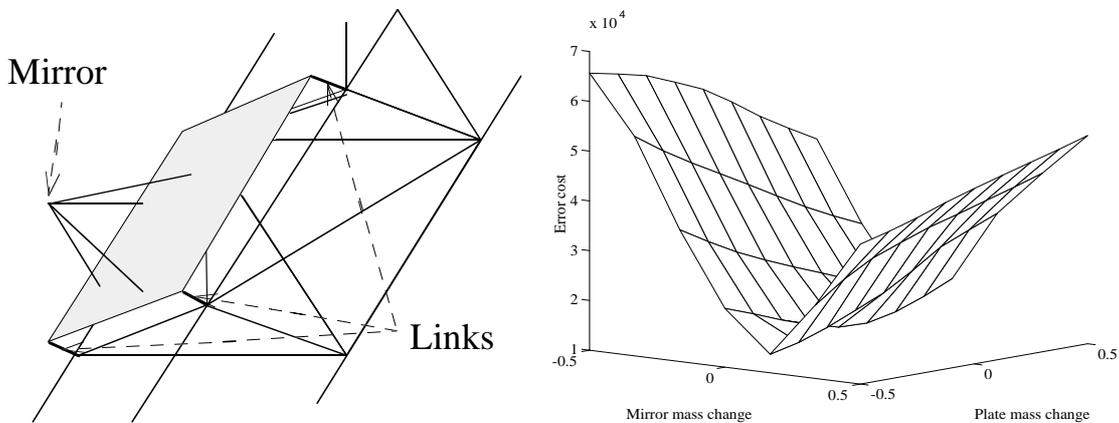


Fig. 2.10: a) plaque support d'instrumentation de l'interféromètre du MIT [bal3,bal7]. b) carte du coût logarithmique pour des variations des masses sur les miroirs ou distribuées sur les plaques.

Le bon conditionnement de la transformation inverse, demande dans un premier temps une sensibilité suffisante du coût aux différents paramètres. La table 2.1 indique ainsi que le paramètre A (section de l'élément de jonction) n'est pas identifiable. Par ailleurs, les masses ont une influence beaucoup plus faible sur l'erreur relative des fréquences propres que sur le coût logarithmique sur les fonctions de transfert. On voit donc que différents modèles sont plus ou moins proches selon le critère. Une dernière difficulté est mise en évidence dans la figure 2.10b où l'on regarde la carte du coût pour une variation de deux modifications de masse. Cette carte présente une vallée correspondant à une modification dont la masse totale est constante. Il y a donc une

bonne sensibilité à chacun des paramètres, mais impossibilité de déterminer autre chose que leur somme. La transformation est mal conditionnée.

Table. 2.1: Modifications nominales considérées et changements associés du coût sur les fréquences modales et du coût logarithmique sur les FRF.

Parameter	Initial Value and standard change	Change in modal frequency cost	Change in logLS cost
Link I_1	$2 \cdot 10^{-11} \text{ m}^4$ (+100%)	18.00	514.80
Link I_2	10^{-11} m^4 (+100%)	131.60	2734.21
Link A	10^{-5} m^2 (+100%)	0.90	0.70
Mirror mass	2.224 Kg (+500 g)	10.26	3816.10
Distributed plate mass	0.970 Kg (+500 g)	7.46	3437.50

Le travail présenté dans ce mémoire ne propose pas de traitement général des problèmes d'unicité. Cependant, la réduction de modèles paramétrés, considérée au chapitre 5, conduit à une caractérisation des sous-espaces de réponse de chaque modèle. La comparaison des sous espaces nécessaires à la description de la réponse des différents modèles considérés dans un problème inverse devrait donc à terme permettre une meilleure prise en compte du conditionnement de la transformation.

2.4. Conclusions et perspectives

On a mis en évidence que les modèles dynamiques de structures possèdent des propriétés particulières comme la réciprocité, la possibilité d'associer propriétés de masse, d'amortissement et de raideur à certains groupes de modes ou d'utiliser une flexibilité résiduelle indépendante de la fréquence pour représenter les contributions des modes de haute fréquence. Ces rappels de résultats plus ou moins classiques sont très importants dans le choix, abordé au chapitre 3, des paramétrisations de modèles utilisés en identification de propriétés modales à partir de mesures dynamiques expérimentales.

L'utilisation de représentations équivalentes de différentes formes d'amortissement est tout à fait essentielle pour la prédiction de la réponse vibratoire des structures amorties. L'utilisation pratique de ces équivalences a été considérée dans des applications expérimentales [bal9,bal10] et analytiques [bal22]. Mais le sujet est loin d'être clos et constitue un de mes centres d'intérêts majeurs.

Il a été clairement montré que les divers critères de comparaison des quantités considérées en dynamique des structures (fonctions de transfert, modes et modèles modaux, propriétés géométriques et matérielles) sont loin d'être équivalents et qu'un choix inadapté peut conduire à de très mauvais résultats. Une fois encore le sujet n'est pas clos et doit être reconsidéré dans le cadre de la résolution des problèmes inverses: identification et recalage.

3. IDENTIFICATION DE MODÈLES MODAUX

L'exploitation des résultats de tests passe généralement par la détermination expérimentale de propriétés modales. De nombreuses méthodes ont été proposées dans la littérature sur l'analyse modale expérimentale, pour les mécaniciens, ou l'identification de système, pour les automaticiens.

La section 3.1 analyse une nouvelle approche de l'identification par raffinement itératif de modèles. Les itérations permettent un compromis essentiel entre l' "art" de l'opérateur qui peut détecter des particularités de la réponse (modes locaux par exemple) et la rigueur d'une optimisation mathématique. L'expérience acquise par des applications à plusieurs centaines de cas réels permet de tirer quelques conclusions quant aux avantages de la méthodologie proposée.

Le modèle considéré initialement ne permet pas de prendre en compte les contraintes de minimalité, réciprocity et éventuellement complétude (représentation par un modèle masse/amortissement/raideur) désirables pour le modèle final. La section 3.2 aborde différentes méthodes d'approximation par des modèles vérifiant les contraintes souhaitées. Il est montré comment cette deuxième phase dans le processus d'identification permet un contrôle utile de la qualité du modèle. Une première démonstration expérimentale de la possibilité d'identifier des coefficients d'amortissement non proportionnel est enfin donnée.

La méthode d'appropriation modale est une alternative classique à l'extraction de propriétés modales à partir de fonctions de transfert mesurées. Une analyse de différents résultats de tests conduit à une discussion en section 3.3 des qualités et limites de cette méthode. L'extraction des paramètres modaux est aussi abordée.

L'utilisation de résultats de tests pour des applications de qualification voire de certification (comme pour le flottage) demande une grande confiance dans la qualité et la reproductibilité des résultats. Le groupe GARTEUR sur les essais au sol, dont les travaux sont évoqués en section 3.4, a pour objectif de comparer méthodes et résultats de tests réalisés sur une même structure par 12 laboratoires européens.

3.1. Identification des propriétés modales

Le mot identification est utilisé ici pour désigner l'ensemble des méthodes dont l'objectif est de caractériser un modèle paramétrique (modèle d'état, fraction polynomiale, pôle/mode complexe, ou modes normaux/amortissement) à partir de mesures de la réponse dynamique d'une structure. Ce problème a fait l'objet d'une littérature très abondante en mécanique et en automatique (avec parfois quelques

conflits entre les deux communautés [ibr2]). La section 3.1.1 propose un classification possible des méthodes les plus usuelles et la section 3.1.2 les raisons ayant motivé le développement des nouveaux algorithmes présentés dans ce mémoire (voir aussi les Refs. [bal2, bal4, bal10, bal19, val1]).

Les sections suivantes détaillent l'algorithme IDRC (Identification de Résidus Complexes), présentent des applications typiques et situent ses performances par rapport à d'autres algorithmes. La prise en compte de contraintes supplémentaires (multiplicité, réciprocity, etc.) n'est abordée qu'en section 3.2.

3.1.1. Classification des méthodes existantes

Comme montré dans la figure 3.1, les méthodes d'identification peuvent être classifiées en termes de données, paramétrisation, fonction coût et algorithme utilisés. La plupart des variantes possibles ayant été étudiées, il n'est pas pensable de faire une comparaison exhaustive avec la littérature existante (voir synthèses en [ewi1,all9,all6,full1]). Les paragraphes suivants abordent chacun des points de la classification proposée en faisant référence une partie de la littérature existante.

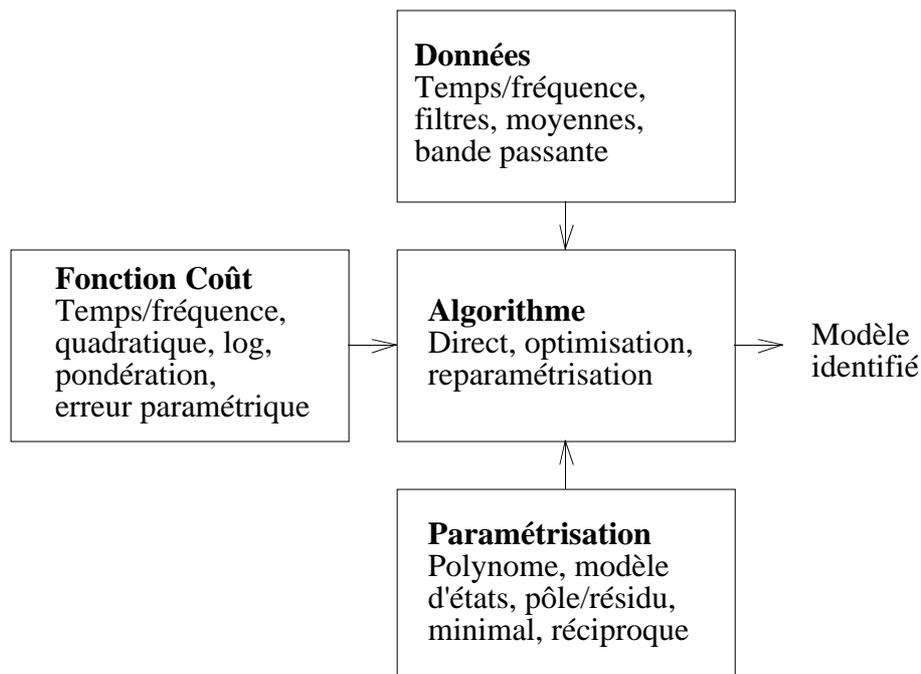


Fig. 3.1: Éléments de caractérisation des méthodes d'identification.

Dans la plupart des applications en dynamique des structures, il est possible de répéter le test et/ou de contrôler les entrées. Pour une structure linéaire, il est donc souhaitable d'utiliser des outils statistiques de traitement du signal pour diminuer les niveaux de bruits ou la variance sur les données estimées. Indépendamment du fait que le coût utilisé pour l'identification soit fréquentiel ou temporel, on commence donc par estimer les fonctions de transfert, les réponses impulsionnelles ou les paramètres de Markov qui sont des représentations équivalentes d'un système linéaire. On parle pour cette étape d'identification non paramétrique [lju1] ou d'estimation de fonctions de transfert [mcc2].

Une structure continue ne peut être représentée que sur un bande de fréquence limitée. La représentation fréquentielle a donc l'avantage certain d'une prise en compte facile de la bande passante du modèle. Par ailleurs, le test en excitation sinus permet une répartition non uniforme des fréquences, ce qui permet en particulier de positionner suffisamment de points près des résonances.

La paramétrisation retenue conditionne de manière directe les algorithmes d'optimisation pouvant être mis en place. Les méthodes basées sur la décomposition spectrale

$$[H(s)] = \sum_{j=1}^{N_c} \left(\frac{\{c\psi_j\}\{\psi_j^T b\}}{s - \lambda_j} + \overline{\frac{\{c\psi_j\}\{\psi_j^T b\}}{s - \lambda_j}} \right) + \sum_{j=1}^{N_{\text{Real}}} \frac{\{c\psi_j\}\{\psi_j^T b\}}{s - \lambda_{j\text{Real}}} + \frac{[T_R]}{s^2} + [E] \quad (3.1)$$

sont les plus anciennes. Les méthodes à un ou plusieurs degrés de liberté [ewi1], dont la très ancienne méthode des cercles, sont basées sur des formes simplifiées de cette paramétrisation. Les méthodes d'appropriation modale [bal14,ott1] utilisent implicitement cette paramétrisation avec l'hypothèse d'un pôle unique pour l'extraction des paramètres modaux (voir section 3.3). La procédure habituelle de la plupart de méthodes (voir section 3.1.2) est d'estimer les pôles puis d'utiliser la forme (3.1) pour estimer les résidus. La méthode IDRC étudiée ici permet une optimisation non linéaire de modèles de cette forme.

Pour des systèmes à plusieurs entrées, la décomposition des matrices de résidu en contributions liées aux entrées et aux sorties conduit à l'utilisation de modèles de la forme (Ibrahim Time Domain method [pap2], Polyreference Least Squares Complex Exponential LSCE method [cro1,cro2], Frequency Domain Polyreference [zan1])

$$[H(s)] = [V] \left[\frac{I}{s - \lambda_j} \right] [L] \quad \text{ou} \quad [h(t)] = [V] [e^{A_j}] [L] \quad (3.2)$$

qui est un cas particulier (diagonal) des modèles d'état ([hob1], Eigensystem Realisation Algorithm ERA [jua1])

$$[H(s)] = [C] [sI - A]^{-1} [B] \quad \text{ou} \quad [h(t)] = [C] [e^{A_j t}] [B] \quad (3.3)$$

Les méthodes basées sur des paramétrisations polynomiales

$$\{y(s)\} = \left[\frac{[a_0] + [a_1]s + \dots + [a_N]s^N}{b_0 + b_1s + \dots + b_Ns^N} \right] \{u(s)\} \quad (3.4)$$

sont étudiées depuis longtemps en automatique (méthodes ARX, ARMAX, OE, etc. généralement associées à une représentation temporelle [lju1]) et en dynamique des structures [auw2,ric1,all9]. Cependant seules des méthodes récentes permettent de prendre en compte l'unicité du dénominateur et les contraintes de rang des matrices a_j liées à l'unicité des déformées modales.

On remarquera que cette paramétrisation est fondamentalement mal conditionnée pour les structures. On montre en effet facilement [jac2], que le nombre de chiffres significatifs nécessaire (sur les coefficient a_j, b_j) augmente très vite avec le nombre de pôles. Leur identification pose donc des problèmes que seules des méthodes plus complexes basées sur des bases orthogonales de polynômes peuvent résoudre [ric1].

Différentes méthodes [leu2, cra1, lee1] utilisent enfin une paramétrisation du second ordre

$$H(s) = [c] \left[I + \hat{C}s + \hat{K}s^2 \right] \left[\hat{b} \right] \quad (3.5)$$

qui ne correspond pas exactement à un modèle masse, amortissement, raideur complet car la réciprocité n'est pas imposée (on utilise $\hat{K} = M^{-1}K, \hat{C} = M^{-1}C, \hat{b} = M^{-1}b$).

Dans le domaine fréquentiel, la plupart des méthodes utilisent le coût additif (2.49). Pour l'identification des antirésonances, il peut être cependant utile de considérer le coût multiplicatif logarithmique (2.50) (voir par exemple la méthode, très proche d'IDRC, développée par Jacques [jac1] à une période ou nous travaillions dans le même laboratoire).

Dans le domaine temporel, le coût additif est utilisé par les méthodes polynomiales (ARMAX, etc.). Les méthodes basées sur des paramétrisations d'état (3.3) ou (3.4) cherchent par contre une approximation de la matrice de Hankel

$$[h(kt)]_{pq} = \begin{bmatrix} [y(kt)]_{NS \times NA} & [y(kt + i_1)]_{NS \times NA} & \cdots & [y(kt + i_{q-1})]_{NS \times NA} \\ [y(kt + j_1)]_{NS \times NA} & [y((k + j_1 + i_1)t)]_{NS \times NA} & \cdots & [y((k + j_{p-1} + i_1)t)]_{NS \times NA} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [y(kt + j_{p-1})]_{NS \times NA} & [y((k + j_{p-1} + i_1)t)]_{NS \times NA} & \cdots & [y((k + j_{p-1} + i_{q-1})t)]_{NS \times NA} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

qui pour un modèle d'état s'écrit clairement sous la forme suivante

$$[h(kt)]_{pq} = \begin{bmatrix} C \\ CA^{j_1} \\ \vdots \\ CA^{j_{p-1}} \end{bmatrix} [A^k] \begin{bmatrix} B & A^{i_1}B & \cdots & A^{i_{p-1}}B \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

dont le rang est clairement limité par celui de A . Aucun lien simple ne semble exister entre le coût additif et la qualité de l'approximation de la matrice de Hankel.

Le problème d'optimisation étant non linéaire, presque toutes les méthodes utilisées aujourd'hui décomposent le problème en deux étapes linéaires. Dans le cas de la dynamique des structures, on commence par estimer les pôles λ_j et les entrées modales $\psi_j^T b$ (matrice d'entrée L dans (3.2), B dans (3.3), etc.) Les entrées modales sont souvent appelées facteurs de participation modaux mais cette terminologie tend à faire oublier la dualité, naturelle pour les systèmes réciproques, entre entrées et sorties.

Pour λ_j et $\psi_j^T b$ donnés, la décomposition en fraction rationnelle (3.1) est une fonction linéaire des sorties modales $\{c\psi_j\}$ et des termes résiduels T_R et E qui peuvent donc être estimés par résolution d'un problème de moindres carrés. Bien que cette étape puisse être réalisée aussi bien dans le domaine temporel que dans le domaine fréquentiel, l'habitude est de le réaliser dans le domaine fréquentiel (avec le coût additif (2.49)). L'introduction des termes résiduels T_R et E dans cette seconde étape est essentielle car les méthodes usuelles ne peuvent les prendre en compte dans l'étape

initiale de détermination des pôles et un modèle de structure sans termes résiduels donne souvent des résultats très moyens (voir Ref. [doe1] par exemple).

3.1.2. Besoins et solutions permises par IDRC et IDRM

Comme indiqué dans l'organigramme de la figure 3.2, la plupart des algorithmes couramment utilisés, comprennent une étape d'estimation des pôles et une étape d'estimation des résidus. Comme indiqué dans la section précédente, la deuxième étape permet l'introduction de termes résiduels, la sélection de l'ordre et l'élimination des modes de calcul. Il est largement accepté que cette étape ne doit pas de faire de manière totalement automatisée mais résulter de choix de l'utilisateur basés sur une grande sélection de critères.

Parmi ces critères, on distingue principalement [all9] les suivants. Les estimations du rang basées sur la décomposition en valeurs singulières des réponses mesurées [pir2,pic1] et les fonctions indicatrices de modes [wil2] donnent une indication du nombre de modes présents et de leur fréquence indépendamment de toute méthode d'identification. Les diagrammes d'erreur donnent une estimation de l'erreur en fonction du nombre de modes retenus. Ces diagrammes sont basés sur un modèle sans termes résiduels et peuvent donc donner des résultats tout à fait inadaptés [doe1]. Les diagrammes de stabilisation sont basés sur l'hypothèse que les modes de calcul changent avec l'ordre du modèle alors que les propriétés physiques se stabilisent. La stabilisation des fréquences, amortissements, et déformées modales permet donc de sélectionner des modes physiques.

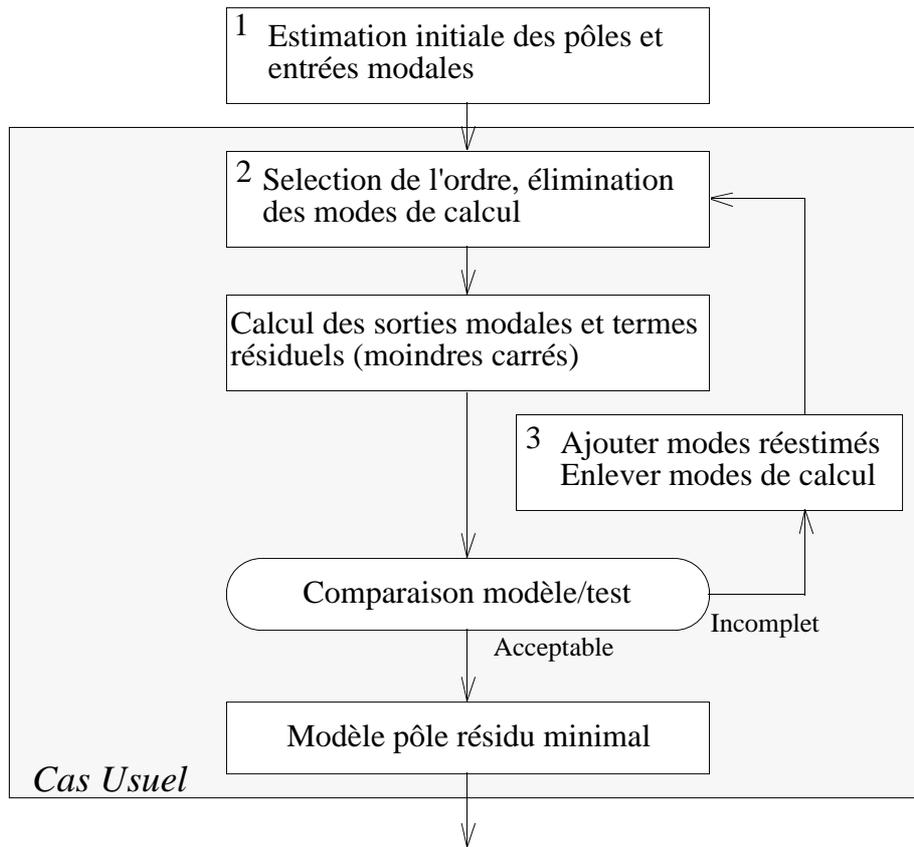


Figure 3.2: Organigramme représentatif de la plupart des algorithmes d'identification utilisés de nos jours.

L'utilisateur ayant une part importante dans le choix des pôles et entrées modales retenues, il convient de réaliser l'identification de manière itérative. Les méthodes usuelles laissent à l'utilisateur le soin de ces itérations. La vérification des fonctions de transfert synthétisées après détermination des sorties modales conduit ainsi l'utilisateur à changer sa sélection de modes, éliminer d'autres modes de calcul ou recommencer une estimation initiale avec par exemple sélection d'une bande de fréquence restreinte (étape 3 de l'organigramme).

Les algorithmes d'Identification de Résidus Complexes (IDRC) et multiples (IDRM), dont l'organigramme est donné en figure 3.3, ont été conçus comme une extension semi automatisée de ce processus.

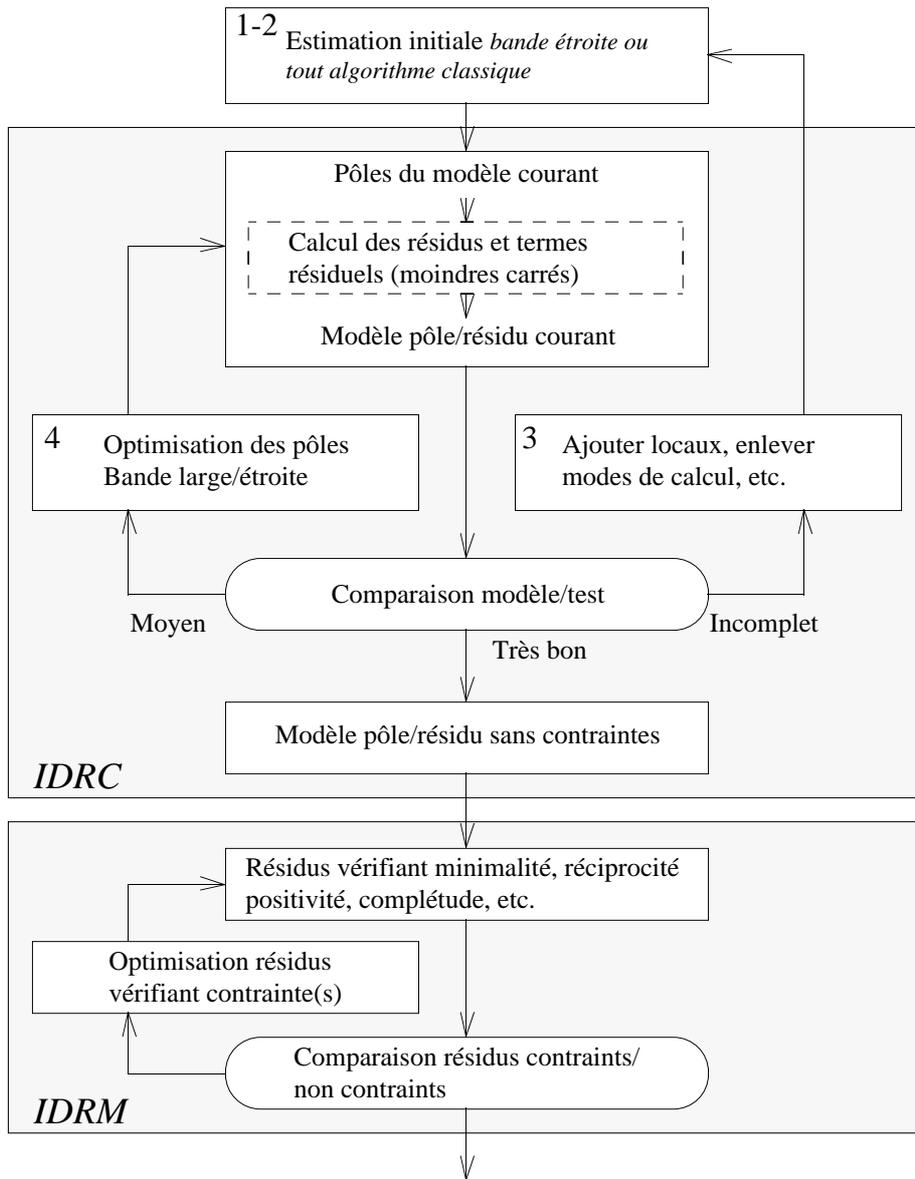


Figure 3.3: Organigramme des algorithmes IDRC et IDRM.

Les estimations initiales fournies par la plupart des algorithmes usuels ne peuvent pas prendre en compte des contributions résiduelles, car l'optimisation deviendrait non linéaire et donc trop coûteuse. Les contributions résiduelles, dont on sait qu'elles sont importantes, doivent donc être représentées par des modes dits de calcul qu'il faut éliminer dans la phase d'estimation des sorties modales. Cette élimination conduit clairement à un modèle non optimal.

La première caractéristique de l'algorithme IDRC est donc l'introduction d'un raffinement itératif du modèle dans sa forme finale (pôle/résidu). Cette optimisation est non linéaire et l'écriture d'algorithmes exploitables en pratique est donc un aspect essentiel. A partir d'un modèle initial, l'optimisation du modèle permet de passer d'un modèle moyen à un très bon modèle. L'optimisation, toujours utile, n'est donc essentielle que pour des applications où une grande précision est recherchée. La création de modèles pour le contrôle actif est particulièrement exigeante et différentes

équipes ont démontré l'utilité des développements proposés pour ce type de problèmes [bla4,pet1,fri2].

La deuxième caractéristique est de ne considérer que les pôles comme variables d'optimisation. La résolution du problème de moindres carrés conduit donc à une estimation des résidus (produit $\{c\psi_j\}\{\psi_j^T b\}$) plutôt qu'à celle des sorties modales $\{c\psi_j\}$ associées à des entrées $\{\psi_j^T b\}$ déduites de l'estimation initiale. Cette différence n'existe que pour les tests à plusieurs entrées pour lesquels $\{\psi_j^T b\}$ est un vecteur et non plus seulement un facteur. Le résidu identifié par IDRC ne vérifie pas la contrainte de rang liée au produit $\{c\psi_j\}\{\psi_j^T b\}$, l'algorithme IDRM est donc introduit pour trouver une approximation minimale (de rang contraint) d'un résidu identifié. L'estimation initiale des algorithmes classiques ne contenant pas de termes résiduels, on a tout lieu de suspecter que les entrées $\{\psi_j^T b\}$ associées sont significativement biaisées. Avec les algorithmes IDRC, IDRM ce biais disparaît et on peut attendre une plus grande efficacité pour des tests à plusieurs entrées.

L'utilisation des pôles comme seules variables permet par ailleurs de déterminer les pôles initiaux et de les optimiser à partir de données sur une bande de fréquence étroite. Ceci permet en particulier de raffiner le modèle par ajout et optimisation de pôles physiques, dont les résonances sont vues sur les données ou les fonctions indicatrices de mode, plutôt que par élimination des modes de calculs. Ce changement de perspective (approche préconisée dans [bal2]) permet de construire assez facilement des modèles ne comportant que des modes physiques.

Allant plus loin que les méthodes usuelles, des variantes de l'algorithme IDRM permettent enfin de prendre en compte les contraintes de réciprocity, positivité, ou de déterminer des propriétés de masse, amortissement et raideur (voir par exemple la démonstration expérimentale de la possibilité d'identifier certains coefficients d'amortissement non proportionnel [bal10]). L'optimisation du modèle par IDRC semble être une étape essentielle pour la détermination de ces modèles qui demandent une grande précision sur les résidus.

Les algorithmes IDRC et IDRM sont détaillés dans les sections suivantes. Il est cependant utile ici de noter quelques problèmes usuels et de montrer en quoi la méthodologie proposée permet leur résolution.

Une résonance visible sur la mesure est mal représentée par le modèle. IDRC permet d'optimiser ce pôle sans changer les autres et donc sans dégrader la prédiction d'autres modes.

Une résonance du modèle ne correspond pas à une résonance physique. Presque tous les algorithmes large bande classiques utilisent des modèles contenant significativement plus de modes que le nombre réel. Les modes additionnels (dits de calcul) doivent être éliminés. L'automatisation de cette élimination, n'est pas robuste et la précision du modèle résultant n'est pas garantie. Cette difficulté n'existe pas dans l'approche proposée de construction de modèle par ajouts successifs des différentes résonances physiques.

Comment identifier un mode très localisé ? Certains modes peuvent n'avoir une réponse significative que sur quelques capteurs. N'utiliser que la réponse de ces capteurs détériore souvent la prédiction d'autres modes. Utiliser toutes les réponses

mesurées, introduit des différences entre le modèle et la réponse plus grandes que la réponse du mode recherché que l'on arrive donc pas à estimer. Le raffinement itératif d'un ensemble de pôles permet de déterminer le pôle du mode local à partir de quelques fonctions de transfert tout en utilisant l'ensemble des données pour les autres pôles.

Que faire en présence de fortes densités modales ? En présence de fortes densités modales, il est souvent difficile de démontrer la présence de modes multiples ou le fait qu'un mode est physique. L'approche IDRC s'est montrée très efficace dans de nombreux cas industriels et la phase de détermination de modèles contraints (IDRM) permet des vérifications efficaces du résultat obtenu.

Comment obtenir un modèle large bande ? La création de modèles précis demande dans la plupart des méthodes d'utiliser des lissages sur une bande de fréquence partielle. La possibilité d'IDRC d'alterner entre lissage bande étroite et large permet de construire un modèle large bande tout en compensant les erreurs systématiques introduites par l'estimation des modes sur une bande de fréquence étroite.

Comment obtenir un modèle minimal, réciproque ou estimer les propriétés de masse, amortissement et raideur ? Les méthodes d'identification couramment utilisées conduisent à des modèles ne vérifiant que l'hypothèse d'unicité des vecteurs propres (modèle minimal). Trois variantes de l'algorithme IDRM ont été développées pour prendre en compte les contraintes de multiplicité, réciprocity ou représentation par un modèle du second ordre avec des propriétés de masse, amortissement et raideur.

3.1.3. Optimisation d'un modèle pôle/résidu non contraint (algorithme IDRC)

L'algorithme IDRC cherche à représenter un bloc de fonctions de transfert mesurées sans tenir compte des propriétés particulières des résidus d'un test à plusieurs entrées et plusieurs sorties. Les réponses mesurées sont donc stockées sous la forme d'une matrice H_{Test} de dimension NW (nombre de points de fréquences retenus) par NF (nombre de fonctions de transfert considérées, en général NF est égal au produit du nombre d'entrées par le nombre de sorties).

On fait l'hypothèse qu'il existe un modèle écrit sous la forme de fraction rationnelle (2.5) avec un terme constant E représentant la flexibilité résiduelle des modes haute fréquence et un terme en $1/s^2$ utilisé s'il y a lieu de représenter la contribution en masse des modes de suspension ou de corps rigide. En l'absence de contraintes sur la forme des résidus, ce modèle peut être écrit comme le produit

$$[H_{Test}]_{NW \times NF} \approx [\Phi(\lambda_j, s)][R] = \begin{bmatrix} I & & & I \\ s - \lambda_j & \dots & I & \frac{1}{s^2} \end{bmatrix}_{NW \times (NP+2)} \begin{bmatrix} R_j \\ \dots \\ E \\ F \end{bmatrix}_{(NP+2) \times NF} \quad (3.8)$$

où chaque ligne de Φ correspond à une fréquence (valeur de $s = i\omega$) et chaque colonne à un pôle ou terme résiduel. En pratique [bal2], on utilise souvent des variantes de la forme (3.8) pour séparer les parties réelles et imaginaires des résidus, imposer une partie imaginaire nulle (hypothèse d'amortissement proportionnel), ou inclure les modes conjugués.

Différents auteurs ont cherché à optimiser tous les paramètres du modèle (3.8) (pôles λ_j et résidus R). Pour un petit test, à 2 entrées, 5 sorties et 5 pôles 120

paramètres doivent être identifiés. Pour un test à 30 modes et 15 entrées/sorties, le nombre est de 13785. Une réduction de taille est donc indispensable pour la plupart des cas industriels et la solution de cette difficulté est un aspect novateur fondamental de l'algorithme IDRC.

Plutôt que de restreindre le nombre de fonctions de transfert [pic1], IDRC considère les résidus comme fonctions des pôles et des données de la manière suivante. Le modèle (3.8) dépend linéairement des résidus \mathcal{R} . La minimisation du coût quadratique

$$J_{Quad} = \text{trace} \left(\left(H_{Test} - \Phi(\lambda_j) \mathcal{R} \right)^H \left(H_{Test} - \Phi(\lambda_j) \mathcal{R} \right) \right) \quad (3.9)$$

est donc un problème de moindres carrés dont la solution explicite est donnée par

$$\{ \mathcal{R}(\lambda_j) \} = \left[\Phi(\lambda_j)^T \Phi(\lambda_j) \right]^{-1} \left[\Phi(\lambda_j) \right]^T [\alpha_{Test}] \quad (3.10)$$

La contribution de chaque pôle n'étant importante que près de sa résonance, le problème est naturellement bien conditionné. Comme en pratique, des approches numériquement plus efficaces et robustes que l'expression (3.10) sont utilisées, les quelques problèmes que l'on pourrait attendre lors de l'utilisation de modes dont la fréquence est en dehors de la bande ou de modes très proches (dont les résonances confondues) ne détériorent pas la qualité de l'estimation des résidus des modes de la bande.

Le coût numérique de la détermination des résidus est assez faible même pour de gros problèmes industriels. L'optimisation du modèle (plus précisément de ses pôles) est donc raisonnable dans la mesure où le nombre d'itérations ne dépasse pas quelques dizaines. Pour accélérer l'optimisation, on utilise le gradient du coût. L'expression explicite du coût est (d'après (3.9) et (3.10))

$$\begin{aligned} J_{Quad}(\lambda_j) &= \text{trace} \left((\alpha - \alpha_{Test})^T (\alpha - \alpha_{Test}) \right) = \\ &\text{trace} \left(\alpha_{Test}^T \left(I - \Phi(\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \right)^2 \alpha_{Test} \right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

ce qui conduit à une expression explicite des dérivées partielles du coût par rapport aux paramètres θ (parties réelles et imaginaires des différents pôles)

$$\frac{\partial J}{\partial \theta} = 2(\alpha - \alpha_{Test})^T \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} R \quad (3.12)$$

Les problèmes d'optimisation avec calcul explicite du gradient sont classiques et ont fait l'objet de nombreuses études. Peu de méthodes sont cependant efficaces car le problème considéré ici est non convexe et souvent mal conditionné (la sensibilité du coût à divers pôles diffèrent souvent par plusieurs ordres de grandeur).

Devant ces difficultés, une approche de dichotomie *ad-hoc* a été développée et a permis jusqu'à maintenant une bonne utilisation de l'algorithme. Cette approche utilise uniquement le signe des composantes du gradient (3.12) pour déterminer si les parties réelles ou imaginaires de différents pôles sont sur- ou sous-estimées. Un pas initial est choisi pour les composantes (réelles, imaginaires) des pôles à optimiser. A chaque itération, on fait un pas sur chaque composante dans la direction indiquée par le signe de la dérivée partielle du coût. Si, pour une composante, le signe de la dérivée partielle change, le pas est divisé par deux.

Cette optimisation ne fournit aucune garantie de convergence mais a donné des résultats très satisfaisants sur des centaines d'applications pratiques. Des essais d'algorithmes plus classiques (gradient et gradient conjugué) ont donné des résultats satisfaisants (en particulier moins erratiques que l'approche par dichotomie), mais la convergence est pas forcément plus rapide et on peut se stabiliser loin de l'optimum. La détermination d'une meilleure philosophie pour le choix des algorithmes utilisés pour l'optimisation reste donc un sujet de recherche active (stage de C. Vallet [val1] en particulier).

3.1.4. Exemples d'applications

Considérons un premier exemple représentatif de la création d'un modèle large bande contenant un nombre significatif de modes. Pour une expérience de contrôle actif des vibrations d'une plaque [pet4], on cherchait à créer un modèle sur la bande 400-2000 Hz. La comparaison modèle/données, montrée dans la figure 3.4, indique clairement la qualité des résultats pouvant être obtenus. Les deux courbes sont en effet si proches que seule une comparaison avec la norme de la différence modèle/données permet de distinguer les variations de l'erreur (la norme de la différence est toujours au moins 20dB au dessous de la réponse).

Le modèle ainsi construit est un modèle large bande associé à un seul modèle d'état. Une grande partie des méthodes établies créent des modèles par bandes. De tels modèles ne sont pas utilisables pour la synthèse d'automatismes en vue du contrôle des vibrations.

Le modèle ne contient aucun mode de calcul. Il tient cependant compte ici des propriétés de capteur des piézoélectriques. L'excitation par ce type de matériaux introduit en effet des pôles très amortis dont l'effet est similaire à la présence de capacités ou de délais temporels placés en série sur chaque capteur. L'utilisation proposée d'une approche par raffinement de modèle est seule à même de permettre la construction d'un bon modèle dans un cas combinant des modes presque réels et une forte densité de modes peu amortis.

3. Identification de Modèles modaux

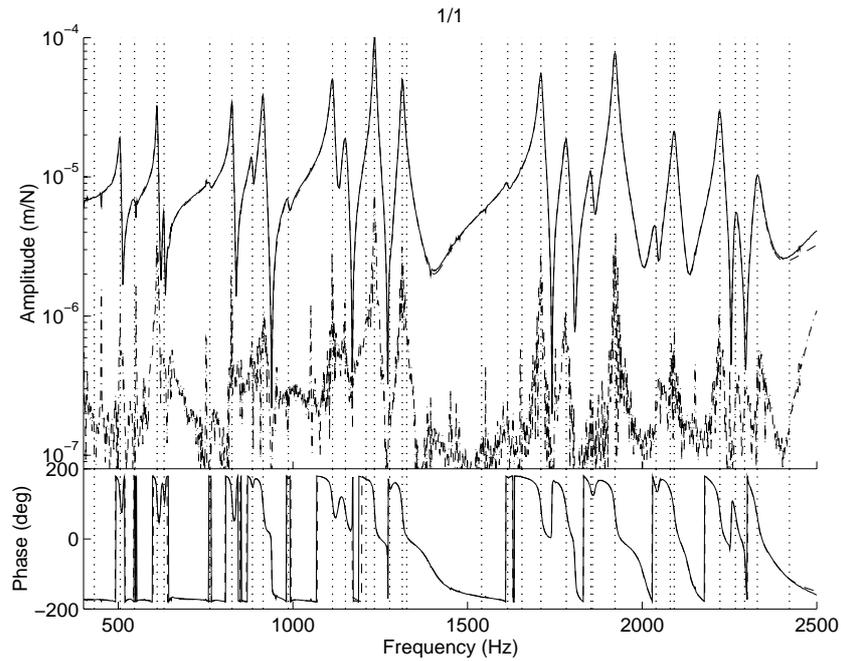


Figure 3.4: Comparaison modèle/test typique. Modèle à 30 pôles 225 FRF. Données expérience ONERA de plaque active [pet⁴]. (—) FRF mesurée α_{Test} , (---) modèle α_{Model} (presque superposé), (-.-) différence $\alpha_{Test} - \alpha_{Model}$.

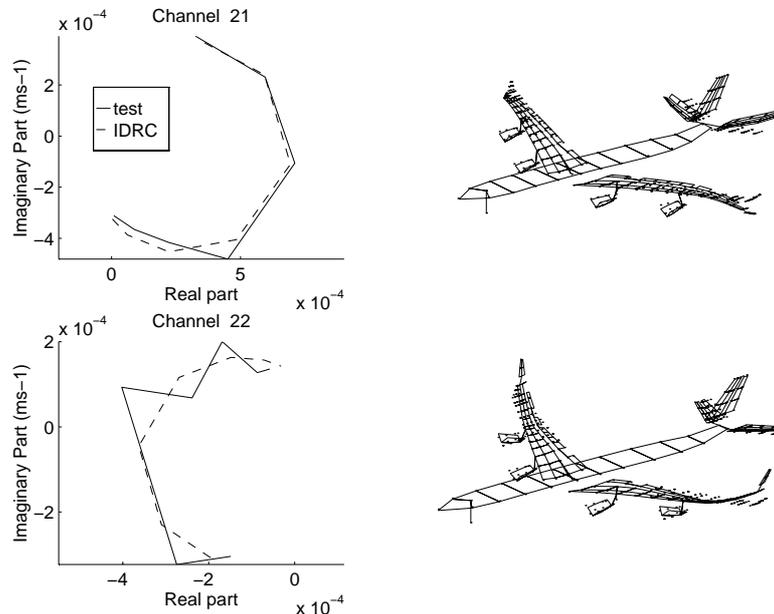


Figure 3.5. Identification de 2 modes avec des données a priori insuffisantes. Les diagramme de Nyquist montrent des résonances bruitées et superposées. Les 2 déformées des 2 modes déterminés par appropriation sont montrés à droite.

Dans ce premier exemple de bonnes données ont permis une identification très précise. A l'opposé l'exemple suivant, tiré d'une mesure sur avion (Airbus A340), montre qu'il est possible d'obtenir de bons résultats à partir de données a priori

insuffisantes. On considère généralement qu'il faut au moins 5 points de fréquence pour bien identifier une résonance (plus si les données sont bruitées) et au moins 2 entrées si les résonances de 2 modes sont confondues. On disposait ici de FRF acquises en sinus mal stabilisé (et donc bruitées voir figure 3.5), sur 7 points de fréquence, et contenant 2 modes pour une seule entrée.

L'insuffisance de ces données ne devrait pas permettre une bonne identification, les deux modes concernés ayant été déterminés par appropriation il est cependant possible de valider les résultats obtenus (voir comparaisons dans la table 3.1). Les critères utilisés sont le MAC (2.52), le facteur d'échelle sur la masse généralisée (2.53), la norme relative sur les vecteurs normalisés en masse (2.54) sans et avec correction d'échelle.

Table 3.1: Comparaison de 2 modes identifiés avec IDRC sur des données insuffisantes avec 2 modes déterminés par appropriation (voir section 3.3).

$\frac{f_{ID} - f_{Ap}}{f_{Ap}}$	$\frac{\zeta_{ID} - \zeta_{Ap}}{\zeta_{Ap}}$	MAC	$\frac{\phi_{ID}^T \phi_{Ap}}{\phi_{Ap}^T \phi_{Ap}}$	$\frac{\ \phi_{ID} - \phi_{Ap}\ }{\ \phi_{Ap}\ }$	$\frac{\ f^* \phi_{ID} - \phi_{Ap}\ }{\ \phi_{Ap}\ }$
4.712%	-42.142%	0.975	0.984	15.9 %	16.0 %
-0.278%	-15.032%	0.941	0.927	24.2 %	24.9 %

Sur les 40 capteurs disponibles (voies de référence) les formes modales et les masses généralisées sont très proches. Les erreurs résiduelles ne sont pas dues à une erreur sur l'amortissement car la correction d'échelle diminuerait significativement l'erreur entre les deux dernières colonnes. On remarque que la non linéarité conduit à une variation significative des fréquences et des amortissements (les FRF sont mesurées à faible niveau, l'appropriation utilise de forts niveaux). La variation de fréquence est confirmée par le test dit d'impédance mais la variation de -40% de l'amortissement sans changement de masse généralisée est un résultat très original. On notera qu'il est parfaitement cohérent avec l'idée usuelle que l'amortissement des avions est fortement lié à des rattrapages de jeux dont les effets augmentent avec l'amplitude.

3.1.5. Efficacité par rapport aux méthodes usuelles

La fonction de transfert montrée en figure 3.6 est tirée d'un exercice Round-Robin de validation de différentes méthodes d'identification [ahl1]. Pour être sélectif, cet exercice, réalisé en aveugle (le modèle sous-jacent n'est pas connu des participants), combine paires de modes proches, mauvais conditionnement pour la réciprocity et réponse temporelle à prédire excitant principalement deux modes difficiles à identifier. La combinaison des algorithmes IDRC et IDRM est la seule à avoir permis de reconstruire presque exactement la réponse temporelle du modèle théorique. Les méthodes proposées sont donc clairement validées et ont donné dans ce cas difficile des résultats plus précis que ceux des méthodes du commerce et de recherche utilisées par les autres participants à l'exercice.

Ceci dit, la qualité d'une méthode d'identification dépend de très nombreux facteurs. La qualité des données (niveau de bruit, présence de biais, résolution fréquentielle), le comportement général de la structure (densité modale, effets large bande liés aux capteurs ou à la structure, niveaux d'amortissement, etc.), l'expertise de l'opérateur (sa capacité à détecter les problèmes et à modifier les paramètres de la méthode pour les

éliminer), et l'adaptation de la paramétrisation choisie à la réponse mesurée (modéliser l'attitude d'un avion ou ses vibrations ne demande pas les mêmes types de modèles) interviennent ainsi de manière très importante. De plus, la réalité physique ne se comportant jamais exactement comme un modèle aussi complexe soit-il, la notion même d'erreur est difficile à définir. Plutôt que de chercher à déterminer la meilleure méthode, il faut donc se résigner à seulement bien identifier les avantages et inconvénients de différentes approches pour différents types de problèmes.

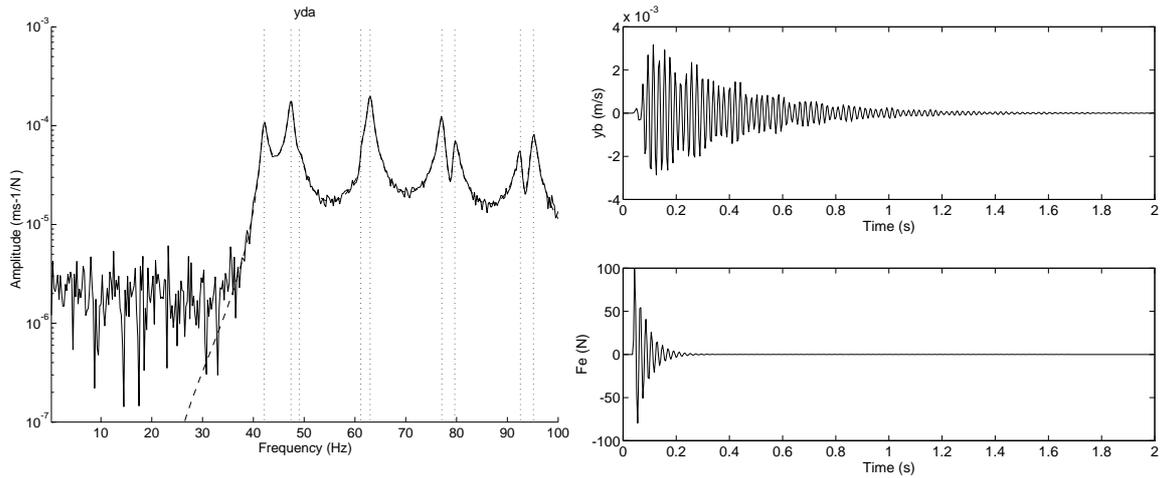


Fig. 3.6: Round-Robin exercise on modal parameter extraction [ahl1].
 a) Comparaison modèle et FRF donnée. b) Réponse temporelle et excitation pour une fonction de transfert non mesurée.

Comme indiqué en section 3.1.2, l'algorithme IDRC ajoute aux méthodes usuelles la possibilité d'optimiser le modèle dans sa forme finale. Les pôles sont les seules inconnues que l'utilisateur a besoin de manipuler. Comme, après optimisation ces pôles sont presque toujours bons, les questions que l'opérateur se pose sont: tel ou tel pic est-il associé à un mode? (une estimation bande étroite permet de trouver le pôle associé), tel ou tel mode du modèle est-il bien optimisé car sa résonance ne colle pas aux données? (on peut optimiser en bande large ou étroite et éventuellement rajouter un autre mode dans des cas de modes proches). Cette approche est clairement beaucoup plus simple que de jouer sur des choix d'ordre de modèle et de pondération ou d'essayer des centaines de pôles présents dans un diagramme de stabilisation.

L'optimisation étant réalisée dans la forme finale, le modèle obtenu par IDRC ne peut être que meilleur que celui obtenu par une autre méthode (plus précisément, meilleur au sens du coût additif utilisé par IDRC et un grand nombre d'autres méthodes). La forme finale (3.1) n'est cependant pas toujours adaptée comme l'illustre la figure 3.7. On cherche ici à faire une identification dans la bande 720-1180 Hz. Il se trouve cependant que 2 modes avec des contributions importantes sont situés juste au dessus de 1200 Hz. En l'absence de mesures au dessus de 1180 Hz, on identifie normalement un modèle contenant 7 pôles qui n'est pas très bon (traitillé sur la figure). Par contre si l'on connaît les 2 pôles proches par d'autres moyens, l'identification sur la bande 720-1180 Hz donne de très bons résultats (à l'échelle de la figure, modèle et données sont confondus).

La représentation des contributions des 2 pôles au dessus de 1200 Hz par une flexibilité résiduelle constante sur la bande est donc insuffisante ce qui conduit à une estimation erronée des résidus (l'estimation du résidu est biaisée). Il a souvent été proposé [ewi1] d'utiliser des termes polynomiaux d'ordre supérieur (flexibilité résiduelle constante plus fonctions linéaires, quadratiques, etc. de la fréquence). Pour les modèles large bande considérés ici, ces termes n'introduisent généralement pas d'amélioration notable (seule la flexibilité résiduelle est utile et souvent indispensable).

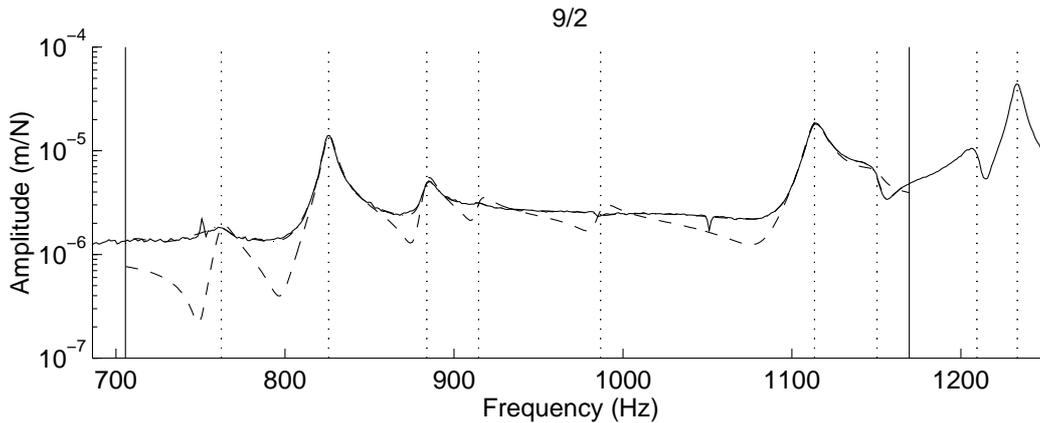


Fig. 3.7: Influence des modes hors bande. (—) α_{Test} mesurée FRF, (---) α_{Model} pour 7 pôles dans la bande entre les lignes continues verticales. (-.-) α_{Model} pour un modèle identifié sur la même bande mais contenant les 2 pôles suivants.

Le coût additif (2.49) étant généralement considéré comme parfaitement adapté aux problèmes d'identification, la méthode IDRC est ce que l'on peut faire de mieux en terme de résultat final. L'opérateur étant inclus dans le processus, des améliorations dans la procédure d'utilisation sont bien évidemment possibles et utiles. Par ailleurs, l'optimisation étant non linéaire, non convexe, et présentant de nombreux minima locaux, les algorithmes utilisés [bal2,val1] ne font que donner un compromis acceptable pour l'utilisation réelle entre qualité du résultat final et coût du calcul. Finalement, l'utilisation d'une paramétrisation pôle/résidu inadaptée conduit à des estimations biaisées, des méthodes permettant de valider la paramétrisation retenue seraient donc utiles.

3.2. Contraintes physiques et modèles associés

(algorithme IDRM)

Comme montré au chapitre 2, les modèles, et donc les données que l'on veut représenter, sont supposés vérifier un certain nombre de propriétés. L'identification d'un modèle par l'algorithme IDRC a déjà introduit les hypothèses d'un modèle linéaire,

diagonalisable, dont la flexibilité résiduelle donne une représentation suffisante des contributions des modes haute fréquence.

Les autres contraintes habituellement considérées (minimalité, réciprocité, complétude, amortissement proportionnel) portent uniquement sur les résidus. Une optimisation simultanée mais sous contrainte des pôles et résidus serait très difficile à mettre en oeuvre et l'inévitable ralentissement de la convergence serait dommageable.

Il est donc proposé de faire une première identification sans contrainte sur les résidus (IDRC), puis de chercher une approximation contrainte des résidus identifiés par comparaison entre résidus contraints et non contraints (algorithme IDRM montré dans l'organigramme de la figure 3.3). Les sections suivantes traitent des variantes de l'algorithme développées pour le traitement des contraintes de minimalité, réciprocité, et complétude.

3.2.1. Tests MIMO et modèles minimaux

La première hypothèse prise en compte [bal3] a été l'unicité des vecteurs propres qui conduit à la création de modèles minimaux. Pour un vecteur propre unique, le résidu associé au modèle d'état général (2.1), prend selon (2.5) la forme

$$[R_j] = [C] \{ \theta_{jR} \} \{ \theta_{jL} \}^T [B] \quad (3.13)$$

Si la valeur propre n'est associée qu'à un vecteur propre, la matrice résidu (3.13) est le produit d'une colonne par une ligne et a donc rang 1 quel que soit le nombre d'excitateurs et de capteurs considérés. Pour les valeurs propres dont la multiplicité est observable (plusieurs vecteurs propres associés à un seul pôle et de formes distinctes pour le choix de capteurs/actionneurs) le rang de la matrice résidu est égal à la multiplicité.

Un modèle est dit minimal s'il y a correspondance entre la multiplicité retenue pour le modèle et la multiplicité réelle. Il n'y a de problème que si la multiplicité réelle est inférieure au nombre d'entrées (la multiplicité pouvant être retenue est le rang maximal de la matrice résidu, soit le minimum du nombre d'entrées et de sorties). Pour des tests à plusieurs entrées et sorties (MIMO), le résultat direct d'IDRC est de multiplicité maximale. Par définition de la décomposition en valeurs singulières, l'approximation optimale (au sens de la norme matricielle) de rang 1 d'une matrice correspond à la première valeur singulière

$$\tilde{R}_j = \{ U_{j1} \} \sigma_{j1} \{ V_{j1} \}^T \quad (3.14)$$

où

$$R_j = \sum_{k=1}^{\min(NS, NA)} \{ U_{jk} \} \sigma_{jk} \{ V_{jk} \}^T \text{ avec } [U_j]^T [U_j] = I_{NA} \text{ et } [V_j]^T [V_j] = I_{NS} \quad (3.15)$$

On peut donc, pour chaque mode j , déterminer une approximation optimale liée à une multiplicité donnée (on garde autant de valeurs singulières que la multiplicité trouvée). De plus, la différence entre modèle minimal et modèle sans contrainte est donnée par le rapport entre la première valeur singulière et la première valeur singulière non retenue (σ_{j2}/σ_{j1} pour une multiplicité de 1). Ce rapport permet, comme dans l'exemple suivant, de vérifier la validité de la multiplicité retenue.

Pour l'expérience de plaque active [pet4], on s'intéresse plus particulièrement aux modes proches de 1850 Hz. Sur la figure 3.8, la présence d'un minimum de la deuxième fonction indicatrice de mode indique un mode double près de 1850 Hz.

Les résultats d'identification pour des lissages à 1 et 2 pôles sont comparés dans la table 3.2. Les coûts quadratiques (LinLS) et logarithmiques (LogLS) (voir section 2.3.1) montrent des variations assez mineures et donc des modèles relativement équivalents. Dans le modèle à 1 pôle, utilisé initialement, le rapport σ_2/σ_1 indique clairement une multiplicité de 2. Cette indication motive la création d'un modèle plus fin à 2 pôles. Dans le modèle obtenu, le résidu sans contrainte associé au 2ème mode n'est toujours pas minimal ($\sigma_2/\sigma_1 = 0.07$) mais il est maintenant raisonnable de penser que cette erreur est liée à une imprécision de l'identification ou une incohérence des données avec l'hypothèse d'unicité des vecteurs propres.

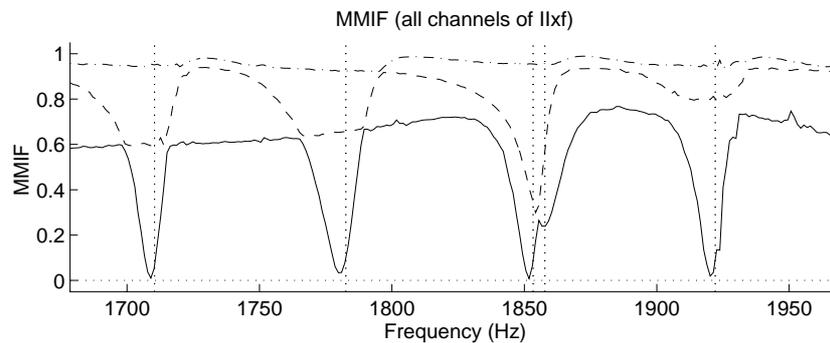


Fig. 3.8: Multivariate Mode Indicator Function [wil2] pour 3 entrées et 15 sorties. Noter les 2 modes très proches de 1850 Hz.

Table 3.2: Modèles globaux à 1 et 2 pôles près de 1850 Hz.

ω (Hz)	ζ %	LinLS	LogLS	σ_2/σ_1	σ_3/σ_1
1853.3	0.306	1.97e-8	1.22e+2	0.47	0.01
1853.3	0.306	1.07e-8	0.83e+2	0.03	0.01
1857.8	0.542			0.07	0.05

De manière générale, l'algorithme IDRC permet une très bonne séparation de pôles proches. IDRM permet de vérifier la multiplicité *a posteriori* avant de poursuivre les itérations d'IDRC si un problème est détecté.

3.2.2. Modèles réciproques

La deuxième hypothèse prise en compte est la réciprocité. Comme indiqué en section 2.1.5, la matrice résidu d'un modèle réciproque doit être symétrique. L'algorithme IDRM pour les modèles minimaux et réciproques [bal2] construit donc

1 une approximation symétrique de la partie collocalisée de la matrice résidu de chaque mode

$$\tilde{R}_{jCol} = (R_{jCol} + R_{jCol}^T)/2 \quad (3.16)$$

- 2 une approximation minimale de la matrice symétrique (3.16) à partir d'une décomposition en valeur singulière (3.14) (qui préserve la symétrie)

$$c_{Col}\psi_j = (\psi_j^T b_{Col})^T = U_I \backslash \sigma_I \text{ avec } \hat{R}_{jCol} = U_I \sigma_I U_I^T \quad (3.17)$$

- 3 une reconstruction des sorties (et plus rarement entrées) modales non collocalisées par résolution d'un problème de moindres carrés

$$c_{NC}\psi_j = \arg \min (R_{jNC} - \{c_{NC}\psi_j\} \{ \psi_j^T b_{Col} \}) \quad (3.18)$$

La détermination des propriétés de masse, amortissement et raideur utilise forcément des modèles réciproques. Les bons résultats montrés dans la section 3.2.3 sont donc une bonne illustration de la validité de l'approche proposée. Ces résultats sont basés sur 6 jeux de mesures successives associés à 6 points d'excitation différents sur l'expérience d'interféromètre du MIT [bal3]. La réciprocité permet de déterminer les observabilités modales pour chaque test. Les observabilités modales $c\psi_j$ (voir section 2.1) étant des quantités physiques indépendantes du point d'excitation, les données acquises permettent de comparer 6 résultats indépendants. La figure 3.9 montre cette comparaison pour le mode 7 (un mode difficile à identifier car très couplé à un mode voisin). Bien que chaque test soit lié à une excitation différente on trouve une très bonne cohérence entre les 6 estimations.

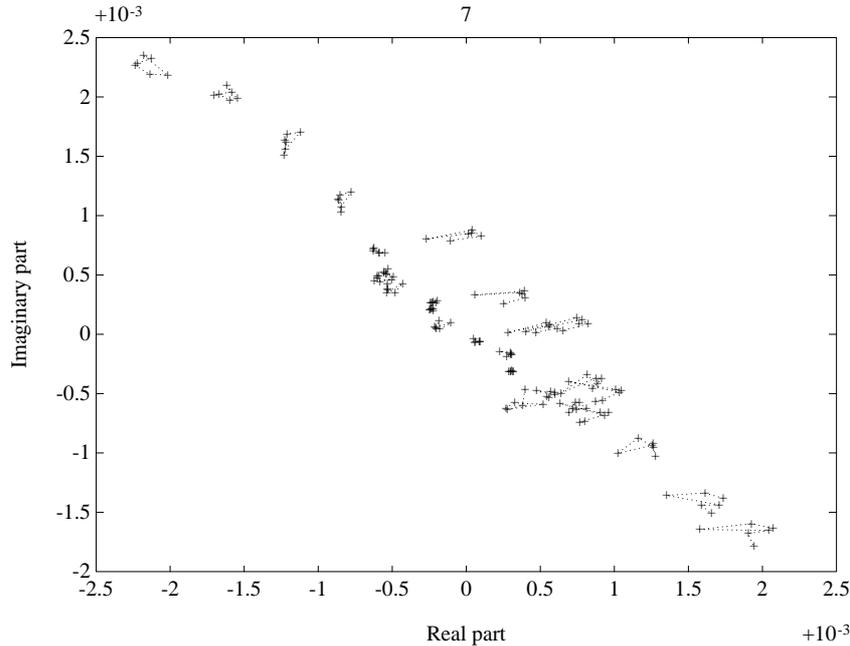


Fig. 3.9: Comparaison de l'observabilité modale $(c\psi)_{ID}$ du mode 7 de l'interféromètre du MIT (les 6 valeurs de chaque capteur sont reliés par une ligne pointillée).

La réciprocité peut aussi être utilisée pour reconstruire des fonctions de transfert associées à des entrées non mesurées (puisque la réciprocité permet de reconstruire les vecteurs de contrôlabilité modale à partir de la mesure des observabilités modales). Le résultat de l'exercice Round Robin montré en figure 3.6 est un bon exemple d'efficacité pour ce type d'applications.

3.2.3. Modes normaux et propriétés de masse, raideur et amortissement

La notion de représentation complète d'un groupe de mode par un modèle du second ordre à amortissement non proportionnel par bloc a été discutée en section 2.2. Ce problème correspond au passage d'une représentation par des modes complexes (définis pour tout système dynamique) à une représentation par des modes normaux (définis seulement pour les structures). Bien que le sujet ait fait l'objet d'une littérature abondante (voir entre autres [ibr3, ses1, ibr7, pla1, zha1, zha3, wei3, imr2, par4, nie2]), les résultats expérimentaux sont très rares et peu convaincants.

Dans les approches existantes, on distingue principalement les méthodes d'identification basées sur une paramétrisation du second ordre et les méthodes de transformation d'un modèle à modes complexes en modèle du second ordre.

Les méthodes d'identification directe (voir [wei3, ibr4, lin4, lee1, leu2, cra2]) ne prennent pas en compte la réciprocité, les propriétés de masse sont donc combinées avec celles d'amortissement et de raideur. En plus de cette résolution incomplète, la faible utilisation de ces méthodes semble indiquer une efficacité inférieure aux méthodes d'identification directe de modes complexes.

Parmi les méthodes en deux étapes ne négligeant pas les effets de l'amortissement non proportionnel, aucune ne cherchait à introduire une transformation conservant les pôles. Or les pôles sont à la fois les quantités les mieux connues, puisque qu'ils sont communs à toutes les fonctions de transfert, et les plus caractéristiques du modèle, car une erreur sur un pôle introduit une erreur sur chacune des fonctions de transfert et cette erreur se situe au niveau des résonances (où la réponse est la plus importante). On a donc introduit une extension de l'algorithme IDRM [bal10] cherchant à utiliser les relations d'inversion (2.41) (celles ci forment la base de nombreuses méthodes) tout en conservant les pôles (c'est l'avantage décisif de l'approche proposée).

Le problème est résolu en plusieurs étapes

- 1) détermination des observabilité modales $(c\psi)_{ID}$
- 2) choix d'une matrice d'entrée c_{ID} et de modes complexes associés ψ_{ID}
- 3) création de $\tilde{\psi}_{ID}$ une approximation complète de ψ_{ID}
- 4) calcul à l'aide des relations d'inversion (2.42) des matrices de masse, amortissement et raideur associées à $\tilde{\psi}_{ID}$, Λ_{ID} . Le modèle résultant est donné par

$$\begin{aligned} & [[M_{ID}]s^2 + [C_{ID}]s + [K_{ID}]]\{q_{ID}\} = [b_{ID}]_{NR \times NA} \{u\}, \\ & \{y\}_{NS \times I} = [c_{ID}]\{q_{ID}\}_{NR \times I} + [E(s)]_{NS \times NA} \{u\} \end{aligned} \quad (3.19)$$

où b_{ID} est relié à c_{ID} par la réciprocité

- 5) calcul des modes normaux ϕ_{ID} par résolution du problème aux valeurs propres (2.18) lié aux matrices M_{ID} , K_{ID}
- 6) construction du modèle en coordonnées principales par projection sur la base calculée

$$\begin{aligned} & [[I]s^2 + [\Gamma_{ID}]s + [\Omega_{ID}^2]]\{p\} = [\phi_{ID}^T b_{ID}]\{u\}, \\ & \{y\} = [c_{ID}\phi_{ID}]\{p\} + [E(s)]\{u\} \end{aligned} \quad (3.20)$$

L'étape 1 correspond à la première version de l'algorithme IDRM (détermination de modèle minimal et réciproque). Les étapes 2 et 3 forment le coeur de la nouvelle solution proposée car les relations d'inversion utilisées pour l'étape 4 et les transformations des étapes 5 et 6 sont classiques.

Comme indiqué dans [bal10], le choix d'une matrice d'entrée c_{ID} dans l'étape 2 est équivalent à un choix de coordonnées. Les meilleurs résultats sont généralement obtenus pour une base proche des coordonnées principales (projection sur la base des modes normaux). Comme ceux-ci ne sont pas encore connus, il faut créer une première approximation.

La première idée [pla1,lal3] consiste à supposer que le système à un amortissement proportionnel et que la complexité des vecteurs correspond à une erreur. Pour la normalisation des modes complexes retenue ici, ce choix revient à poser

$$c_{ID} = \text{Re}(\sqrt{i}(c\psi)_{ID})/\sqrt{i} \quad (3.21)$$

Une autre approche est préférée ici. Pour une bonne identification, on devrait d'après les relations d'inversion avoir

$$cM^{-1}c^T \approx (c\psi)_{ID} \Lambda_{ID} (c\psi)_{ID}^T \quad (3.22)$$

De plus, si les NR modes complexes retenus vérifiaient l'hypothèse d'amortissement proportionnel par bloc la matrice $(c\psi)_{ID} \Lambda_{ID} (c\psi)_{ID}^T$ serait définie positive de rang NR . En pratique, on vérifie que cette matrice a NR valeurs propres positives (c'est d'ailleurs une manière de vérifier l'hypothèse d'amortissement non proportionnel par bloc) et on choisit les NR vecteurs propres correspondant pour c_{ID} .

Une fois c_{ID} choisi, les modes complexes ψ_{ID} sont déterminés par résolution du problème de moindres carrés

$$\psi_{ID} = \arg \min_{\psi_{ID}} \left(\text{trace} \left(\left\{ (c\psi)_{ID} - c_{ID} \psi_{ID} \right\}^{*T} \left\{ (c\psi)_{ID} - c_{ID} \psi_{ID} \right\} \right) \right) \quad (3.23)$$

L'étape 3 cherche une fois de plus à approcher des résidus initiaux par des résidus vérifiant une contrainte. Ici on cherche à approcher ψ_{ID} par un ensemble complet de modes $\tilde{\psi}_{ID}$. L'objectif de minimisation retenu est

$$\min_{\tilde{\psi}_{ID}} \sum_{\substack{j=1,2N \\ k=1,N}} |\tilde{\psi}_{kj} - \psi_{kj}|^2 \quad \text{avec} \quad \sum_{j=1,2N} \tilde{\psi}_{kj} \tilde{\psi}_{jl} = 0_{kl} \quad (3.24)$$

On peut montrer qu'une solution exacte de ce problème d'optimisation sous contrainte est donnée par

$$\tilde{\psi}_{ID} = (I - \delta\delta^*)^{-1} (\psi_{ID} - \delta\psi_{ID}^*), \quad (3.25)$$

où δ est solution de l'équation de Riccati algébrique suivante

$$\left[\psi_{ID} \psi_{ID}^T \right]_{NR \times NR} - [\delta]_{NR \times NR} \left[\psi_{ID}^* \psi_{ID}^T \right] - \left[\psi_{ID} \psi_{ID}^* \right] [\delta] + [\delta] \left[\psi_{ID}^* \psi_{ID}^* \right] [\delta] = 0, \quad (3.26)$$

qui numériquement peut être résolue facilement.

Pour valider expérimentalement cette méthodologie générale, les 6 jeux de données mesurés sur l'interféromètre du MIT sont particulièrement adaptés car l'éventuelle cohérence des résultats obtenus par traitement indépendant de chacun des tests fournit une démonstration nette de la validité des résultats obtenus.

La figure 3.10, illustre ainsi le fait que l'approximation par un modèle complet permet effectivement de représenter la distribution de phase caractéristique d'un modèle à amortissement non proportionnel (les résidus associés à un modèle à amortissement proportionnel sont montrés en référence). La table 3.3 compare les différentes estimations des termes non diagonaux importants (au sens du critère de séparation (2.36)). Les termes les plus importants montrent une très bonne cohérence qui ne peut être le fruit du hasard.

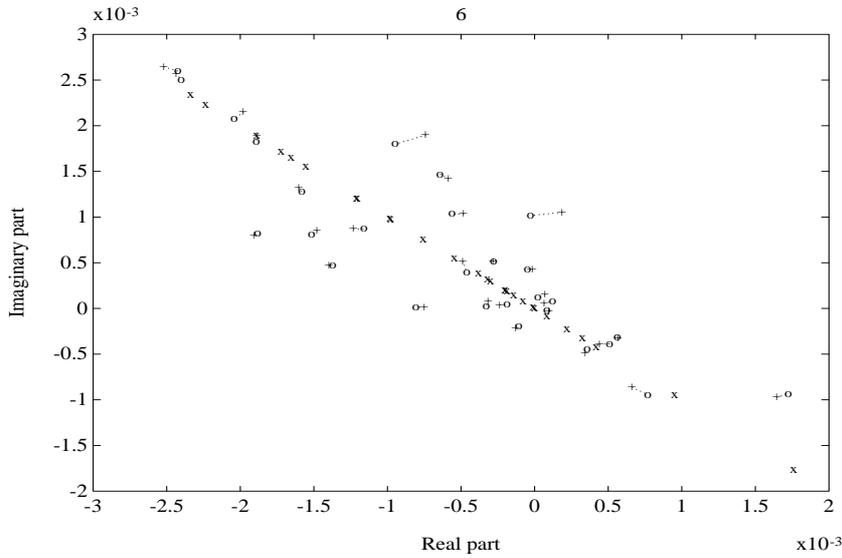


Figure 3.10: Comparaison des observabilités modales pour le mode 6 de l'interféromètre du MIT: (+) $(c\psi)_{ID}$, (o) $c_{ID}\tilde{\psi}_{ID}$, (x) $(c_{ID}\phi_{ID})_j / \sqrt{2i\omega_j\sqrt{1-\zeta_j^2}}$. Pour chaque capteur les pointillés relient les estimations initiales et complètes.

Table 3.3: Valeurs non diagonales importantes des matrices d'amortissement modal identifiées expérimentalement et indépendamment.

Termes	Γ_{67}	Γ_{56}	Γ_{68}	Γ_{78}	Γ_{57}	Γ_{34}
$2\zeta\omega/ \Delta\omega $	1.46	0.53	0.41	0.30	0.23	0.20
Test 1	-2.51	-0.82	2.40	-0.19	0.66	0.32
Test 2	-3.00	-1.16	4.12	-0.77	0.35	0.08
Test 3	-3.24	-1.75	3.76	-0.65	1.48	-0.15
Test 4	-3.32	-1.54	5.84	-0.73	0.55	-0.07
Test 5	-3.35	-2.30	4.22	-0.74	0.38	0.15
Test 6	-3.74	-1.73	4.18	-0.62	-0.10	-0.62

On trouvera plus de détails sur cet exemple en [bal3,bal10], mais il est important de noter qu'il est une des rares (voire la seule) validations expérimentales sur un cas complexe d'une méthode permettant d'identifier des coefficients d'amortissement non

proportionnel. Une fois de plus, l'ensemble IDRC et IDRM a permis de trouver ces résultats. Il est peu probable que l'utilisation de cette version d'IDRM soit robuste à des erreurs significatives sur les modes complexes.

3.3. Identification des modes normaux par appropriation

La méthode d'appropriation modale est utilisée de manière habituelle par l'équipe ONERA d'Essais au Sol de Structures Aéronautique dans laquelle je suis intégré depuis 1993. Cette méthode, développée à l'ONERA dès les années 50, cherche à isoler la réponse d'un mode particulier de manière à permettre une identification de ses caractéristiques par des méthodes simples. Le travail effectué dans ce domaine a eu deux axes principaux. L'introduction de méthodes automatisées d'extraction de paramètres modaux [bal23] et une analyse de la validité des résultats obtenus par appropriation (stage C. Chapelier et [bal14]).

3.3.1. Principes et pratique sur des structures aéronautiques

On rappelle rapidement ici les principes de la méthode d'appropriation modale (pour plus de détails voir [pir1,bal14,auw1]). L'idée de base est que l'extraction de paramètres modaux d'une réponse mesurée est simple si un seul mode contribue à cette réponse. Les méthodes d'appropriation (en anglais : *force appropriation* ou *phase resonance*) cherchent donc à définir une entrée généralisée (forces d'excitation appliquées en un certain nombre de points mais correspondant à un signal temporel unique) tendant à isoler la réponse d'un seul mode.

Idéalement, il y a autant d'excitateurs que de modes, on peut alors piloter complètement les amplitudes modales (coordonnées principales p) à partir d'une force donnée par (voir chapitre 2 pour les notations)

$$u = [\phi^T b]^{-1} [Is + \Gamma + \Omega s^{-1}] \{ \dot{p} \} \quad (3.27)$$

On peut en particulier isoler le mode j à sa résonance ω_j (obtenir une réponse en vitesse unitaire $\dot{p}_k = \delta_{jk}$) en appliquant les forces réelles

$$u_l = \sum_k [\phi^T b]_{lk}^{-1} \Gamma_{kj} \quad (3.28)$$

Pour un système à amortissement proportionnel (Γ diagonal), ces mêmes forces conduisent à une réponse mono-modale à toutes les fréquences

$$\dot{y} = \frac{s \{ c \phi_j \} \{ b^T \phi_j \}^T}{s^2 + 2\zeta_j \omega_j s + \omega_j^2} u \quad (3.29)$$

Pour un système à amortissement non proportionnel (le cas général), les forces (3.28), n'isolent le mode qu'à sa résonance. Cependant la différence par rapport à la

réponse mono-modale est souvent faible (voir discussion sur l'amortissement proportionnel en section 2.2.3).

En pratique, on ne peut, sans identifier les modes, estimer les amplitudes modales p à partir des mesures y . On doit donc utiliser des critères approximatifs pour évaluer la qualité du rejet des modes autres que celui que l'on cherche à isoler. L'appropriation est donc réalisée de manière itérative à l'aide d'un critère de phase, pour déterminer la résonance, et d'un critère de qualité, pour mesurer le rejet des modes non désirés.

Le **critère de phase** est basé sur les propriétés de réponse d'un mode isolé (voir section 2.2.3). A la résonance, cette réponse est purement réelle en vitesse (imaginaire en déplacement). On choisit donc un capteur particulier ou une combinaison de capteurs et utilise le passage à zéro (ou -90° pour le déplacement) de la phase pour estimer la fréquence de résonance.

Le passage à zéro de la phase d'un mode isolé est aussi utilisé sur l'ensemble des capteurs pour définir les différents **critères de qualité**. La partie imaginaire de la réponse en vitesse étant en effet essentiellement liée à la contribution des modes que l'on souhaite rejeter, celle ci doit être minimale pour une bonne appropriation. Les critères suivants sont utilisés

- Le critère utilisé par l'ONERA maximise un rapport indicatif de l'importance relative de la partie imaginaire et de la réponse totale (sa valeur est 1 pour une appropriation parfaite)

$$q(s) = 1 - \frac{\{\text{Im } \dot{y}\}^T \{\dot{y}\}}{\{\dot{y}\}^T \{\dot{y}\}} \quad (3.30)$$

- Le MMIF (Multivariate Mode Indicator Function [wil2]) minimise le rapport entre l'énergie en quadrature (en phase pour une mesure déplacement ou accélération) et l'énergie totale (sa valeur est 0 pour une appropriation parfaite)

$$q(s) = \frac{\{\text{Im } \dot{y}\}^T M \{\text{Im } \dot{y}\}}{\{\dot{y}\}^H M \{\dot{y}\}} \quad (3.31)$$

- Le MMIF inverse [nas2] maximise le rapport entre l'énergie en phase et l'énergie totale (sa valeur est 1 pour une appropriation parfaite)

$$q(s) = \frac{\{\text{Re } \dot{y}\}^T M \{\text{Re } \dot{y}\}}{\{\dot{y}\}^H M \{\dot{y}\}} \quad (3.32)$$

Pour les critères (3.31)-(3.32) une masse M est introduite pour comparer des énergies. Cette masse n'étant pas connue, elle est remplacée par une matrice de pondération qui, sauf exception liée en particulier à des calibrages de capteurs, est la matrice unité.

L'appropriation est le plus souvent réalisée par un ajustement manuel (et donc empirique) des amplitudes associées à chaque point d'application des forces. Il a cependant été noté par plusieurs auteurs que la matrice de mobilité Y donne une relation linéaire entre u et \dot{y} , $\{\dot{y}(s)\} = [Y] \{u(s)\}$. Les fonctions indicatrices de mode (3.31)-(3.32) correspondent donc à des quotients de Rayleigh de la forme

$$q(s) = \frac{\{u\}^T A \{u\}}{\{u\}^T B \{u\}} \quad (3.33)$$

avec $A = \left[\text{Im } \dot{Y} \right]^T M \left[\text{Im } \dot{Y} \right]$ et $B = \left[\dot{Y} \right]^H M \left[\dot{Y} \right]$ pour MMIF et $A = \left[\text{Re } \dot{Y} \right]^T M \left[\text{Re } \dot{Y} \right]$ et $B = \left[\dot{Y} \right]^H M \left[\dot{Y} \right]$ pour le MMIF inverse. On notera aussi la Méthode d'Asher étendue [iba1] où $A = \left[\text{Im } \dot{Y} \right]^T \left[\text{Im } \dot{Y} \right]$ and $B = I$.

Les entrées u optimisant q correspondent donc aux vecteurs et valeurs propres solutions de $Au = Buq$. Quand une matrice de fonctions de transfert (plusieurs entrées) est mesurée il est donc possible de calculer facilement les forces d'appropriation.

Ces méthodes n'ont pas été validées par une utilisation en essai sur des structures aéronautiques réalistes. Une première raison de cette non utilisation est la grande sensibilité des forces au bruit ou à des erreurs sur la fréquence de résonance (voir exemples dans [bal14]). Il semble cependant que cette sensibilité puisse être diminuée à l'aide des méthodes proposées par le LMA de Besançon [rat1].

Une raison plus fondamentale est la présence pour la plupart des structures considérées de non linéarités significatives. En présence de telles non linéarités, seul un test à multi excitations décorréelées pourrait permettre d'obtenir une matrice de fonction de transfert. En mono excitation (seule disponible de manière standard pour les essais grande échelle de l'équipe d'essais au sol de l'ONERA), les fréquences de résonance changent en fonction du point d'entrée. Les réponses en fréquence supposées être des fonctions de transfert peuvent alors donner des résultats abhérants comme obtenir deux minima du MMIF pour une seule résonance physique (comme dans l'exemple de la figure 3.11).

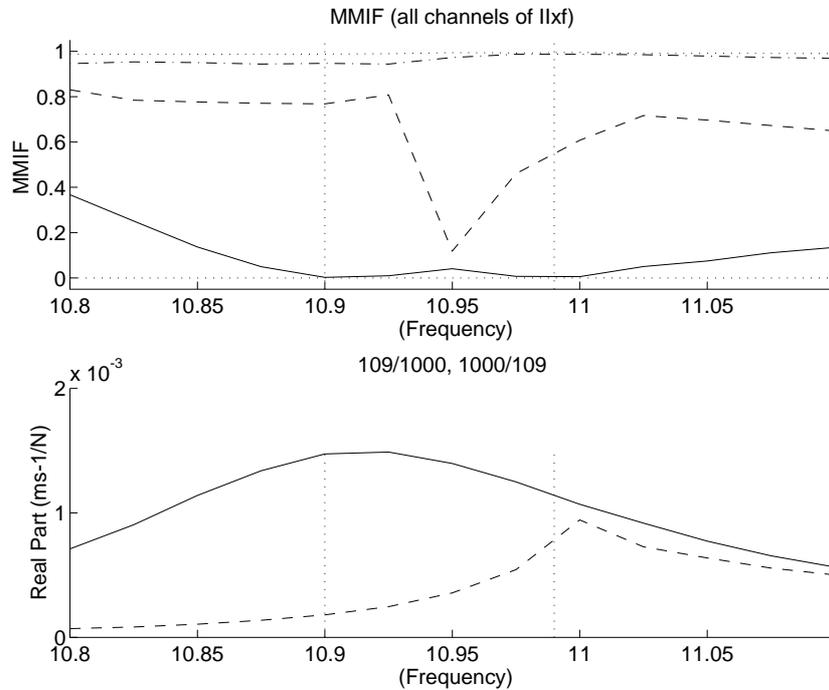


Figure 3.11: MMIF et réciprocity (transfert 1000 (empennage) vers 109 (voilure) et 109 vers 1000) pour un test sinus sur le Paris [bal14]. Les données semblent indiquer la présence de 2 modes alors que physiquement il y en a un seul.

De manière générale, l'automatisation de l'appropriation manuelle semble plus prometteuse. De telles approches marchent très bien sur des exemples analytiques mais seule une validation sur des structures réelles, pour le moment impossible à l'ONERA pour des raisons matérielles, permettrait de donner des conclusions plus fermes.

3.3.2. Extraction automatique des paramètres modaux

Pour un mode bien approprié, c'est à dire pour des forces conduisant à une réponse dominée par un seul mode, on cherche à déterminer les caractéristiques modales (fréquence ω_j , taux d'amortissement ζ_j , masse généralisée m_{jIN} , déformée ϕ). Les méthodes classiques de *puissance complexe* (PC) et de *force en quadrature* (FQ), basées sur l'hypothèse d'un mode parfaitement isolé, sont généralement utilisées à cet effet.

De (3.29), on déduit que la puissance complexe introduite (fonction de transfert entre la force généralisée appliquée et le déplacement collocalisé (réciproque)) a la forme

$$PC_{IN} = \frac{\dot{y}_{IN}}{u_{IN}} = \frac{s \{c_{IN} \phi_j\} \{c_{IN} \phi_j\}^T}{s^2 + 2\zeta_j \omega_j s + \omega_j^2} \stackrel{\Delta}{=} \frac{I}{m_{jIN}} \frac{s}{s^2 + 2\zeta_j \omega_j s + \omega_j^2} \quad (3.34)$$

La puissance complexe vérifie quatre relations qui permettent la détermination des caractéristiques modales

$$\begin{aligned} \omega_j &= \arg \max_{\omega_j} PC_{IN} \\ \partial PC_{IN} / \partial \omega_j \Big|_{\omega_j} &= -1/2 m_{jIN} \zeta_j^2 \omega_j^2 \\ PC_{IN} \Big|_{\omega_j} &= 1/2 m_{jIN} \zeta_j \omega_j \\ \phi &\propto \text{Re}(\dot{y}) \end{aligned} \quad (3.35)$$

Si l'on injecte une force en quadrature de phase avec la force d'appropriation $\tilde{u}_{IN} = (1 + i\alpha)u_{IN} = u_{IN} + i\alpha 2m_{jIN}\zeta_j \omega_j$, la réponse devient

$$\dot{y}_{IN} = \frac{s u_{IN}}{m_{jIN} (s^2 + 2\zeta_j \omega_j s + (\omega_j^2 + \alpha 2\zeta_j \omega_j \omega))} \quad (3.36)$$

dont la résonance de phase est trouvée à $\tilde{\omega}_j = \omega_j \sqrt{1 - \zeta_j \alpha}$. Les caractéristiques modales liées à cette expérience sont donc données par les relations

$$\begin{aligned} \omega_j &= \tilde{\omega}_j \Big|_{\alpha=0} \\ \zeta_j &= \frac{1}{\omega_j} \frac{\partial \tilde{\omega}_j}{\partial \alpha} \\ m_{jIN} &= 1/2 \zeta_j \omega_j \text{Re}(PC_{IN}) \Big|_{\omega_j} \\ \phi &\propto \text{Re}(\dot{y}) \end{aligned} \quad (3.37)$$

La méthode FQ peut être appliquée à l'aide d'un essai réel (approche traditionnelle) ou par utilisation de la phase puissance complexe aux points de fréquence voisins de la résonance (traitement FQ du test puissance complexe introduit en [bal23]).

Les relations (3.35) et (3.37) font intervenir des valeurs de pente et de maximum. Les données expérimentales étant souvent assez bruitées, il était habituel de les indiquer manuellement. Une automatisation a été proposée [bal23] et validée sur plusieurs campagnes d'essais réels (A340, GARTEUR, NH90). On commence par une identification sur l'ensemble des voies disponibles (et non pas seulement la puissance complexe). Pour de tels problèmes à un seul pôle et une bande de fréquence étroite, la méthode IDRC utilisée en automatique a toujours donné de très bons résultats. La détermination des pentes et maxima sur le modèle résultant est alors très simple et peut être réalisée de manière totalement automatisée.

Le lissage donne le pôle mais peut aussi être utilisé pour déterminer la déformée et la masse généralisée. Les extensions proposées permettent donc à partir de deux tests (PC et FQ) d'obtenir 5 estimations différentes des caractéristiques modales. La cohérence des résultats obtenus donne alors une meilleure confiance dans leur qualité.

3.3.3. Quelques réflexions additionnelles

Concernant les avantages de l'identification de propriétés modales par appropriation, il convient de mettre en valeur les points suivants.

L'appropriation donne même pour un système à amortissement non proportionnel, une estimation des modes normaux. Il est donc possible de faire des comparaisons directes avec un modèle élément fini conservatif même si l'identification des coefficients d'amortissement non proportionnel est difficile. Par contre l'extraction des paramètres modaux (fréquence, amortissement, masse généralisée) est généralement basée sur l'hypothèse d'un mode à amortissement proportionnel. Il y a donc là source d'erreur potentielle.

Pour des structures non linéaires (la plupart des structures assemblées ont des modes non linéaires), on ne sait pas réellement choisir une paramétrisation de modèle appropriée. Par exemple, les extensions de la paramétrisation pôle résidu considérées en Ref. [pir1] définissent des coefficients non linéaires par rapport à l'amplitude des capteurs mesurés. Bien que les corrélations modèle/test obtenues soient souvent bonnes, la non linéarité est ici rendue dépendante d'une quantité non physique (la non linéarité est une propriété de la structure et ne saurait dépendre du choix des capteurs). On perd donc le lien essentiel entre paramètres physiques et modèle identifié. L'utilisation de la notion de mode pour un système non linéaire reste donc à ce jour utilisée dans un cadre théorique mal défini et les résultats obtenus ne peuvent donc pas être vraiment validés.

L'appropriation estime les déformées d'autant mieux que les contributions des modes éloignés sont en quadrature de phase [cha3]. Ainsi dans bien des cas, il ne serait même pas nécessaire d'ajuster les forces pour que la réponse en phase donne une très bonne indication de la déformée. Les difficultés viennent clairement des modes proches en fréquence.

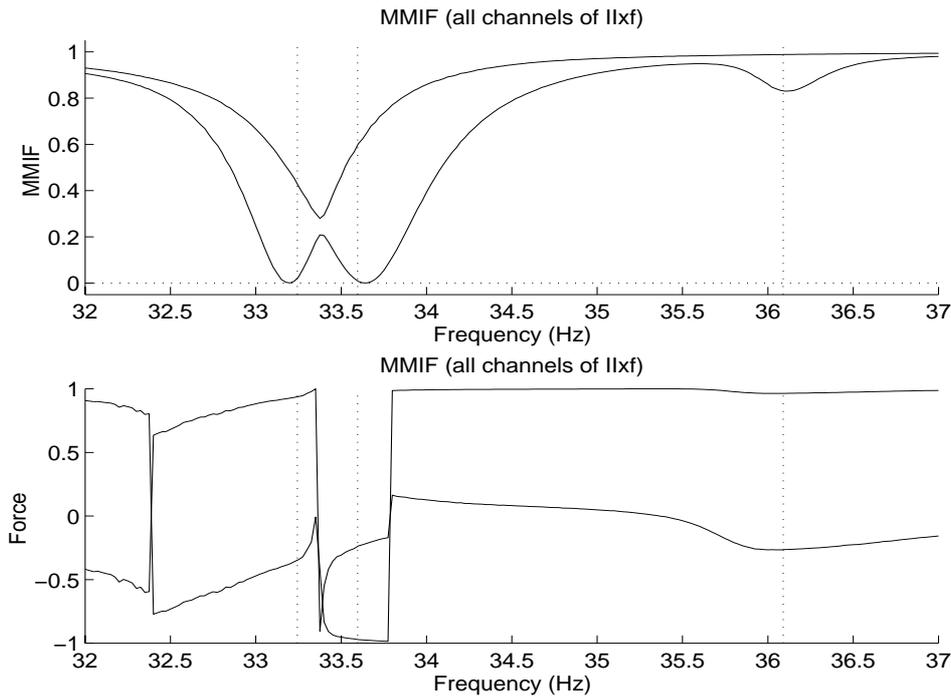


Figure 3.12: MMIF et forces d'appropriation associées pour une excitation en bout de bidon de la structure GARTEUR (voir section 3.4).

La figure 3.12 basée sur des données prises sur la structure GARTEUR (voir section 3.4), montre ainsi que le critère de qualité (MMIF ici) peut pour des modes proches rester faible (ici il ne remonte qu'à 0.2) tout en passant de l'appropriation d'un mode à l'appropriation du suivant (noter l'évolution des forces). Le maximum à 0.2 est ici suffisant pour bien distinguer les deux modes, mais dans bien des cas pratiques deux modes peuvent être assez proches pour que le critère de qualité ne suffise pas à caractériser l'appropriation. Dans un tel cas, seule une identification avec un modèle à deux modes garanti un résultat précis (en particulier l'orthogonalité des modes identifiés).

Une appropriation partielle peut clairement être couplée avec un lissage. Cette approche donne de très bons résultats. Pour des modes proches (comme ceux de l'exemple de la figure 3.5), le lissage doit cependant être vérifié ce qui demande au moins deux configurations de forces différentes. Or la non linéarité induit un changement des fréquences de résonance avec l'entrée considérée (figure 3.11), on peut donc avoir du mal à comparer les modes identifiés sur deux jeux de données.

En résumé, les principaux avantages de la méthode d'appropriation sont les suivants. La partie réelle de la réponse appropriée est une estimation directe de la déformée du mode normal. En maintenant l'excitation appropriée, il est donc peu coûteux de mesurer la déformée avec un très grand raffinement spatial (mesure multiplexée ou séquentielle par accéléromètre mais aussi vibromètre laser). La méthode demande une sélection des forces et oblige donc à considérer un nombre significatif de points d'excitation. On évite donc les cas de modes mal excités et donc difficiles à identifier. Par contre, le temps de mesure augmente de manière très significative. Enfin pour un système non linéaire, l'appropriation permet d'avoir une idée du comportement à fort niveau. On ne mesure pas réellement un mode (puisque la notion de mode n'est plus définie) mais l'information est suffisamment similaire pour être utile.

3.4. Comparaison internationale de tests sur une structure représentative

La variété de matériels et de procédures utilisés pour le test dynamique de structures étant très grand, il est essentiel de bien connaître toutes les étapes du processus de mesure et d'extraction de paramètres modaux pour en assurer la qualité globale. Sur initiative de l'ONERA la section Structures et matériaux de l'organisation GARTEUR (Group for Aeronautical Research and Technology in Europe) a formé début 1995 un groupe de travail sur les méthodes d'essais au sol (SM AG-19).

Ce groupe rassemble des industriels pratiquant des tests d'avion en vue de la certification au flottement, des centres de recherches, ainsi que des universitaires. Les participants sont pour la France (ONERA, SOPEMEA, Aérospatiale, Intespace, CNAM), l'Allemagne (DLR), les Pays-Bas (NLR, Fokker), la Suède (Saab) et le Royaume Uni (DRA, Manchester University, Imperial College).

Les sections suivantes résument quelques points clés de l'activité de ce groupe (conception du test, comparaison de fonctions de transfert, comparaison de modes identifiés), de plus amples détails seront donnés dans les publications officielles du groupe [bal24]. Pour les comparaisons, les résultats de différentes équipes sont notées A-K et correspondent à l'ordre chronologique. Certains tests ne correspondent pas à la spécification commune et les données associées ne sont pas utilisées pour la comparaison.

3.4.1. Conception de la structure et spécifications du test commun.

La considération des spécifications initiales pour une structure test (voir table 3.4) à conduit à la structure finale montrée en figure 3.10. Le dimensionnement, la conception du joint central et de la suspension, ainsi que le traitement amortissant n'ont pas posé de problèmes particuliers. On notera que le traitement amortissant (viscoélastique fourni par 3M et contre plaque pour augmenter le cisaillement de la couche viscoélastique) à fait passer l'amortissement du premier mode de flexion de l'aile seule de 0.28% à 1.1% et celui du mode de torsion de 0.15% à 0.86%.

Table 3.4: spécifications initiales de la structure test du groupe GARTEUR SM-AG 19 et raisons associées

<ul style="list-style-type: none"> • un groupe de 3 modes couplés • 5 à 50 Hz 50-100 kg 2m par 2m • un joint dur et aisément positionné à la connexion aile/fuselage • traitement amortissant • suspension commune par sandows • 24 positions communes de mesure 2 positions communes d'excitation 	<ul style="list-style-type: none"> • rendre le problème difficile • permettre le test avec des équipements généralement dimensionnés pour des structures plus importantes • permettre le transport en limitant la variabilité entre les assemblages • obtenir un amortissement ne dépendant pas trop de l'instrumentation • limiter la variabilité liée à la suspension • permettre une superposition des résultats
--	---

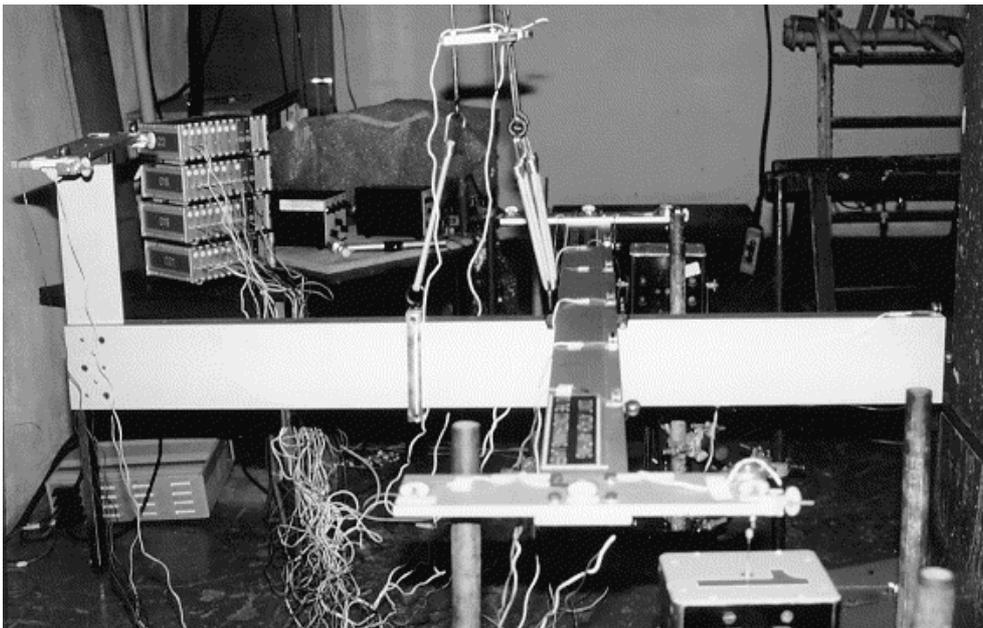


Fig. 3.13: Structure représentative du groupe GARTEUR SM-AG 19.

La construction d'une structure avec trois modes proches posait évidemment le problème le plus difficile. La variable de conception retenue fut la masse des bidons en bout d'aile. Le fait, que les 2 points communs d'excitation retenus soient aussi en bout d'aile, a été la source de l'essentiel des variations entre les résultats des différents participants. Selon les équipes, les forces sont mesurées soit à l'aide de cellules de forces soit à l'aide d'une mesure de l'impédance électrique aux bornes de la bobine de l'excitateur. Avec cette deuxième technique la masse mobile de l'excitateur fait partie intégrante de la structure que l'on identifie. Chaque équipe ayant le choix de son matériel de mesure, il était indispensable pour permettre une comparaison valable de

permettre une compensation de la masse mobile. Les extrémités avant des bidons, légèrement raccourcis, sont donc équipés de masses additionnelles (voir figure 3.11).

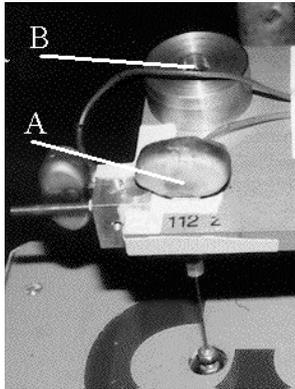


Fig. 3.14: Masse de compensation (200g en nominal) en extrémité de bidon. A et B : positions d'excitations utilisées en pratique.

Cette complexité nécessaire à la comparaison a induit un nombre important de variations entre les résultats des différentes équipes. Le premier type d'erreur est lié à l'utilisation d'une masse inadaptée (pas de masse avec une cellule de force, une masse totale de 200g plutôt que 2 fois 200g, etc.). Un deuxième type d'erreur est lié à un mauvais positionnement du point commun d'excitation (les points A et B de la figure 3.11 ont été utilisés).

Les comparaisons résumées dans les sections suivantes montrent que la méthode retenue pour mesurer les forces n'a pas d'influence significative.

Les 24 points communs de mesure sont indiqués sur la figure 3.13, ce choix fixé avant la construction de la structure réelle n'est en fait pas tout à fait adapté car il ne permet pas une bonne séparation des caractéristiques spatiales des différents modes. On voit ainsi dans la table 3.5, que les modes 1-6, 3-5 et 5-7 ne sont pas bien séparés. Une amélioration peut être obtenue à l'aide de pondérations. Par exemple un facteur 10 sur le capteur vertical 206z du joint central sépare les modes 1 et 6. Aucune pondération simple cependant ne semble pouvoir créer une bonne séparation des 8 modes considérés.

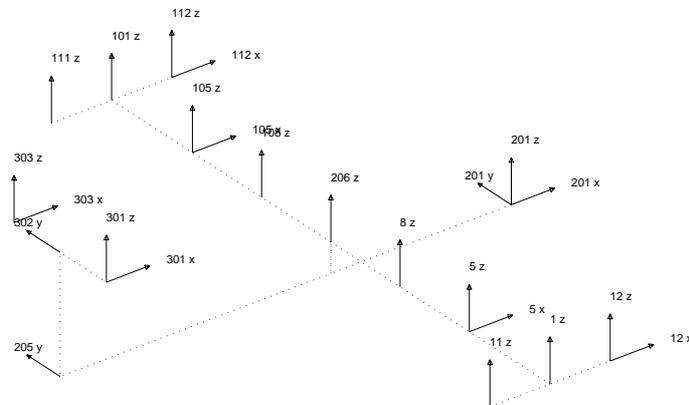


Fig. 3.15: Position des 24 points communs de mesure.

Table 3.5: autocorrélation (auto-MAC) d'un jeu de déformées expérimentales

Mode	1	2	3	4	5	6	7	8
1	100.0	0.0	0.2	1.6	0.5	18.1	0.0	0.1
2	0.0	100.0	0.5	0.2	0.0	0.1	0.1	0.0
3	0.2	0.5	100.0	0.3	11.8	1.7	0.5	0.1
4	1.6	0.2	0.3	100.0	1.1	1.8	0.1	2.0
5	0.5	0.0	11.8	1.1	100.0	0.8	21.3	0.0
6	18.1	0.1	1.7	1.8	0.8	100.0	0.5	0.4
7	0.0	0.1	0.5	0.1	21.3	0.5	100.0	0.4
8	0.1	0.0	0.1	2.0	0.0	0.4	0.4	100.0

La suspension retenue semble bien avoir joué son rôle en permettant de garder les mouvements rigides de la structure à des fréquences assez basses (voir table 3.6). Un certain nombre de modes flexibles liés essentiellement à des translations de la plaque supérieure ou des déflexions des sandows sont cependant visibles dans toutes les données et varient significativement d'une équipe à l'autre.

Table 3.6 : Longueur du pendule et fréquence estimée du mode de pompage.

Groupe	B	C	E-F	G	H	I
Longueur (m)	12.0	0.0	2.6	0.7	0.4	0.9
Fréquence (Hz)	1.88	1.8	2.7	2.2	2.6	2.4

3.4.2. Mesures de fonctions de transfert.

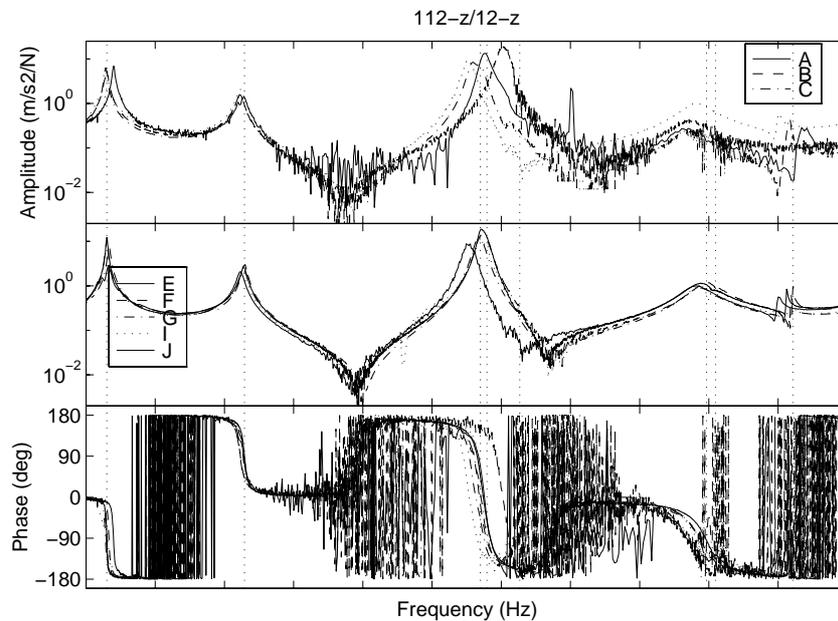


Figure 3.16. Transfert croisé $112z / 12z$ mesuré par différents participants. Les réponses en amplitude sont groupée en fonction du point d'excitation (A et B de la figure 3.14).

La figure 3.16 illustre bien la cohérence des résultats obtenus (voir [bal24] pour plus de détails). Toutes les tendances principales sont bien identifiées par les participants, mais on note des variations assez significatives des fréquences. Certaines variations sont clairement liées aux modifications de la structure introduites par le matériel de test mais d'autres facteurs comme l'assemblage, les conditions de suspension et la température peuvent aussi être intervenus sans que les données disponibles permettent de le prouver. Les comparaisons permettent par contre de conclure que la méthode de mesure de force (cellule de force ou mesure du courant dans un excitateur piloté en courant) n'a pas d'effet significatif.

3.4.3. Extractions de paramètres modaux

La figure 3.17, illustre les variations de fréquences et amortissements modaux fournis par les participants ayant respecté les spécifications du test. Les variations moyennes sont de l'ordre de 4% sur les fréquences et 30% sur les amortissements. De nombreuses variations s'expliquent par les changements d'appareillage de mesure, mais celui-ci étant généralement négligé dans la modélisation, ces chiffres semblent représentatifs de la variabilité que l'on pourrait attendre d'un test standard. On notera de plus que une identification indépendante des modes à partir de fonctions de transfert mesurées par chaque groupe indique que les variations sont bien liées à des modifications de la structure et non à des erreurs liées à la méthode d'extraction des paramètres modaux.

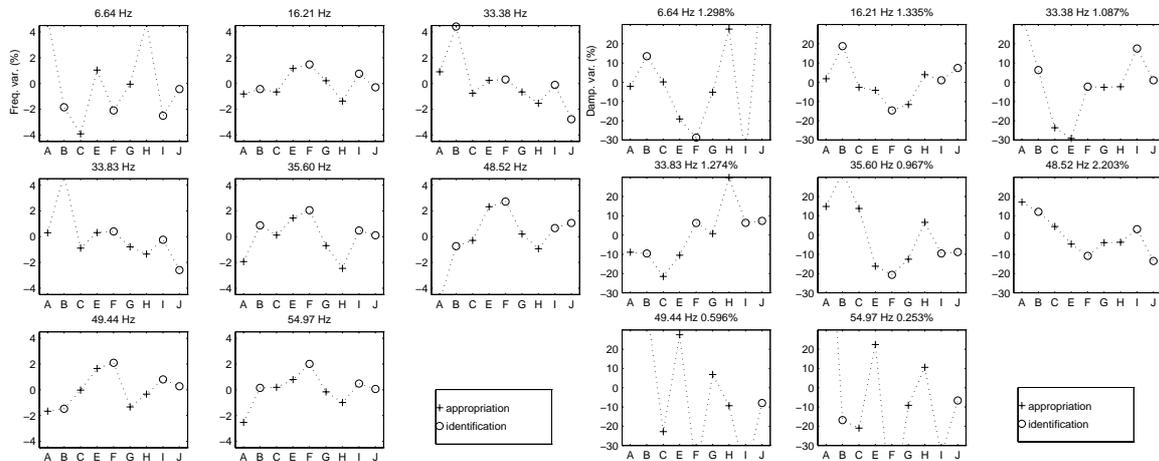


Figure 3.17. Variations des fréquences et amortissement modaux fournis par les participants.

Les comparaisons de déformées modales donnent de très bons résultats, même si pour des modes très proches en fréquence, il convient de comparer les sous-espaces modaux plutôt que les modes identifiés individuellement. Un résultat plus remarquable est illustré dans la table 3.7. Il y apparaît en effet que les variations sur la masse généralisée estimée (indiquées par le facteur d'échelle (2.53)) sont largement inférieures aux variations des taux d'amortissement estimé. Le processus d'identification des paramètres modaux est donc suffisamment robuste pour permettre la détermination précise de la masse généralisée, paramètre indépendant de l'amortissement, mais dont la

connaissance demande une identification précise du niveau d'amortissement qui varie ici d'un test à l'autre.

Table 3.7 : facteur d'échelle (2.53) sur les modes normalisés en masse et variations sur le taux d'amortissement estimé (tous les deux en %) pour une comparaison des modes normalisés en masse donnés par les différents groupes avec ceux du groupe C. Les éléments en grisé correspondent à une mauvaise corrélation de la déformée [bal24] et doivent donc être ignorés.

Mode	A		C		E		F		G	
	f	$\Delta\zeta$								
1	-3	-2	0	0	9	-19	3	-29	3	-5
2	-7	5	0	0	5	-2	8	-12	-4	-9
3	-21	77	0	0	5	-7	6	28	0	28
4	-17	16	0	0	0	14	7	35	6	28
5	7	1	0	0	2	-26	12	-30	3	-23
6	-6	12	0	0	-8	-9	20	-15	-3	-8
7	-6	98	0	0	10	65	-96	-28	-6	38
8	-4	180	0	0	-17	55	7	-56	-1	15

3.5. Conclusions et perspectives

La validation d'un algorithme d'identification est forcément partielle puisque chaque essai a ses spécificités. J'ai testé l'algorithme IDRC sur de nombreuses structures (interféromètre du MIT et composants, A300-600, A340, Marianne, DGV200, maquette GARTEUR, banc rotor, ...), travaillé avec différentes équipes pour l'identification de modèles utilisés en contrôle actif [bla4,pet4,fri2], et eu des échos favorables des personnes utilisant cette méthode dans la cadre de la *Structural Dynamics Toolbox* [bal2]. On peut montrer [gui1] que les algorithmes de moindres carrés non linéaires sont optimaux en l'absence d'information sur le bruit de mesure, l'algorithme IDRC en rendant cette optimisation possible conduit donc à des résultats plus précis que la plupart des méthodes existantes. L'algorithme a bien sûr les défauts de ses qualités, il permet une intervention simple de l'utilisateur mais n'est donc pas parfaitement automatisé, il permet de déterminer quels termes résiduels sont importants mais présente un biais significatif pour une mauvaise sélection, il utilise les pôles comme variables principales et est donc peu efficace pour des structures présentant des pôles fortement amortis ou des niveaux de bruits tels que les résonances ne sont pas visibles. Les développements en cours sont liés la compréhension des biais causés par la représentation inexacte des termes résiduels et l'introduction de stratégies d'optimisation plus évoluées.

L'algorithme IDRM introduit une méthodologie nouvelle pour la construction de modèles dont les résidus vérifient certaines contraintes. La détermination de modèles du second ordre dynamiquement équivalents à des groupes de modes complexes identifiés

a pu en particulier être validée sur un cas expérimental difficile. Les questions importantes restant en suspens sont liées à l'effet des biais sur l'estimation du modèle initial et à la construction de modèles dont les antirésonances sont minimales de phase.

L'utilisation automatique de l'algorithme IDRC a permis d'automatiser l'extraction des paramètres modaux dans des tests par appropriation modale. La détermination des forces d'appropriation est l'étape la plus coûteuse de la méthode et l'automatisation même partielle de cette étape serait fortement souhaitable. Après des simulations [cha3], le pilotage entièrement automatique de la chaîne de l'ONERA est récemment devenu possible et des tests d'appropriation automatique sur un planeur sont prévus.

Le test dynamique de structures est un tout qui comprend la définition des conditions aux limites, le choix du matériel utilisé, les méthodes de traitement du signal et d'identification et bien d'autres facteurs. Le groupe d'action sur les méthodes d'essais au sol, que j'ai coordonné, a permis à 12 équipes européennes réalisant régulièrement des tests de faire le point sur les méthodes d'analyse modale expérimentale. En dehors du fait que cet exercice s'inscrit dans une démarche de qualité pour chacune de ces équipes, on remarque que les résultats obtenus sont très homogènes (beaucoup plus que ceux présentés dans un exercice similaire organisé à la fin des années 70 [ewi8]) et que les variations semblent être explicables par des effets liés à l'instrumentation et la suspension. En particulier, les variations d'amortissement sont plus grandes que les variations sur les masses généralisées ce qui est le résultat attendu théoriquement (si une partie significative des effets de dissipation dépend de l'instrumentation) mais est contraire à l'idée usuelle que l'amortissement ne peut pas être déterminé de manière très précise.

4. MODÈLES RÉDUITS COUPLÉS

On désigne ici par modèle réduit un modèle dont la taille est suffisante pour bien décrire le comportement dynamique d'une structure mais bien inférieure à celle d'un modèle permettant de caractériser les propriétés géométriques et mécaniques locales. A partir d'une description géométrique et matérielle, la méthode des éléments finis permet de créer un modèle précis et flexible mais dont la taille est telle que des calculs itératifs ne sont pas abordables.

Pour un ensemble restreint de sollicitations dynamiques, il existe généralement des sous-espaces de dimension faible permettant de bien décrire le comportement du modèle complet. La projection du modèle sur la base d'un tel sous-espace (méthode de Ritz) permet donc d'estimer la réponse du modèle initial avec grande précision. Plutôt que d'utiliser une perspective historique et de tenter une présentation synthétique de méthodes similaires connues sous le nom de condensation, sous structuration dynamique, synthèse modale, superélément, etc., la section 4.1 montre comment les méthodes de réduction, dont l'objectif est de choisir une base de projection, peuvent être motivées par des restrictions spatiales et fréquentielles sur les chargements considérés. Bien que très utilisée dans les Refs. [bal12,bal15,bal16,bal17,bal18,bal22,tin1], cette analyse n'est présente que dans les notes de cours [bal25] et encore de manière partielle.

Les normes en énergie de déformation et en énergie cinétique sont rarement utilisées dans le cadre des méthodes de réduction. La section 4.2 introduit donc quelques utilisations intéressantes (voir aussi [bal16,bal21]) pour la construction de modèles réduits, l'obtention de mesures pratiques de l'erreur associée et la construction des méthodes itératives de correction.

La réduction étant souvent réalisée au niveau de modèles de composants, des prédictions de réponses couplées doivent être considérées. Les méthodes de synthèse modale et de sous structuration dynamique considèrent généralement un couplage par des liaisons parfaites sur lesquelles on impose la continuité des déplacements. La section 4.3 introduit un autre point de vue sur le problème en considérant le couplage de composants disjoints reliés par une interface physique. Cette approche utilisable directement permet aussi de comprendre, et parfois d'éviter, les phénomènes de verrouillage obtenus dans le cas des liaisons parfaites qui correspondent à la limite d'une interface d'extension nulle (voir aussi [bal15, bal20]).

Les principales sources d'amortissement (rivets, habillage, etc.) ne sont généralement pas modélisables. Les modèles élément fini ne donnent donc que des approximations peu précises de la dissipation présente. La section 4.4 montre comment le lien direct existant entre modèles analytiques réduits et modèles expérimentaux complets permet de créer des modèles hybrides combinant données analytiques et expérimentales sans pour autant considérer de recalage (correction de la description géométrique et matérielle conduisant au modèle analytique). Les qualités de cette

approche et ses limites pour la prédiction de réponses couplées sont analysées (voir aussi [bal8,bal9,bal11,bal12]).

4.1. Méthodes de réduction de modèle.

4.1.1. Projection d'un modèle complet

Les modèles, déjà discrétisés, considérés ici prennent la forme générale

$$\begin{aligned} [Ms^2 + Cs + K]_{N \times N} \{q\} &= [b]_{N \times N_A} \{u(s)\}_{N_A \times I} \\ \{y(s)\}_{N_S \times I} &= [c]_{N_S \times N} \{q\}_{N \times I} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Le principe d'une réduction cinématique est de chercher une approximation de la solution dans le sous-espace engendré par une base de projection (matrice réelle T) associée à des DDL généralisés q_R

$$\{q_{\text{True}}\}_{N \times I} \approx [T]_{N \times N_R} \{q_R\}_{N_R \times I} \quad (4.2)$$

On suppose par ailleurs que la projection des équations d'équilibre sur la base duale T^T est nulle, ce qui conduit à un modèle réduit de la forme

$$\begin{aligned} [T^T M T s^2 + T^T C T s + T^T K T]_{N_R \times N_R} \{q_R\} &= [T^T b] \{u\}_{N_A \times I} \\ \{y\}_{N_S \times I} &= [c T] \{q_R\}_{N_R \times I} \end{aligned} \quad (4.3)$$

On notera que la vérification des équations d'équilibre ainsi projetées correspond à la minimisation de l'énergie potentielle sur l'ensemble des champs du sous-espace engendré par T . En général ces champs sont cinématiquement admissibles et la réduction correspond à une application de la méthode des déplacements.

Tout comme les fonctions de forme de la méthode des éléments finis permettent de connaître la déformation en tout point, la matrice de projection T si elle est conservée permet de recouvrer à l'aide de (4.2) les valeurs de l'ensemble des DDL et donc de calculer en post-traitement déformations, contraintes ou tout autre valeur d'intérêt.

La qualité de l'approximation est liée au fait que tous les états q effectivement trouvés ont une bonne approximation dans le sous-espace engendré par T . Il en découle que l'objectif des méthodes de réduction de modèle est de *sélectionner une base de vecteurs T engendrant un sous-espace permettant de bien représenter la réponse à tous les chargements considérés.*

De nombreuses justifications pour la sélection de différentes bases sont possibles. Dans ce mémoire on montre que pour la création d'un modèle dynamique, seuls les chargements considérés sont importants. Les chargements réels sont liés à des forces ou déplacements extérieurs, des modifications de conditions aux limites (système couplés abordés en section 4.3), ou des modifications de propriété (chapitre 5). Sauf exception, leurs valeurs exactes ne sont pas connues au moment de la réduction. On est donc conduit à supposer que les chargements représentatifs sont des forces ou des

déplacements unité à toutes les fréquences et DDL considérés. Les deux sections suivantes montrent comment ces deux hypothèses conduisent aux méthodes de réduction classiques. La section 4.1.4 revient alors sur le lien entre l'hypothèse retenue et l'erreur pour une sollicitation réelle.

4.1.2. Chargement représentatif en force

Pour un chargement en force, les états effectivement trouvés sont donnés par la relation

$$\{q(s)\}_{N \times I} = [Ms^2 + K]^{-1} [b]_{N \times NA} \{u(s)\}_{NA \times I} \quad (4.4)$$

où les propriétés spatiales des forces appliquées sont caractérisées par la matrice d'entrée b et les caractéristiques temporelles/fréquentielles par le vecteur d'entrées u .

Une méthode de réduction de modèle a pour objectif de représenter la relation entre u et q aussi précisément que possible. En l'absence d'autre information, on suppose qu'une matrice d'entrée unité (u égal à l'identité à toutes les fréquences) est représentative de l'ensemble des chargements considérés et l'on cherche à en déduire un choix de base T .

On montre facilement que la raideur dynamique peut être exprimée sous la forme d'un développement de Mac-Laurin donné par

$$[Ms^2 + K]^{-1} = K^{-1} + \sum_{j=1}^p (-s^2)^j (K^{-1}M)^j K^{-1} - (-s^2)^p (K^{-1}M)^{p+1} (Ms^2 + K)^{-1} \quad (4.5)$$

où il est supposé que la raideur est non singulière (une discussion générale du traitement des cas avec modes de corps rigide est faite en section 4.1.5).

Il découle de (4.5) que les termes du développement de la réponse à une entrée unité au voisinage de la fréquence nulle sont donnés par

$$[Ms^2 + K]^{-1} [b]_{N \times NA} = \sum_{j=0}^p (-s^2)^j [(K^{-1}M)^j K^{-1}] [b]_{N \times NA} + o(s^p) \quad (4.6)$$

Pour un cas à une seule entrée ($NA=I$) les vecteurs $T_{kj} = (K^{-1}M)^j K^{-1}b$ sont connus sous le nom de vecteurs de Krylov. L'utilisation de plusieurs entrées correspond à la génération de sous-espaces de Krylov. La construction de la base T par utilisation d'un certain nombre de vecteurs ou sous-espaces de Krylov découle donc naturellement de l'hypothèse de représentativité de la matrice d'entrée unité (on rappelle que les entrées correspondent ici à des forces).

Il est bien connu que les vecteurs de Krylov ont tendance à être très colinéaires [cra11]. Un modèle projeté sur la base des vecteurs de Krylov aurait donc un très mauvais conditionnement numérique. Il est donc préférable d'utiliser une procédure d'orthogonalisation récurrente comme celle de l'algorithme de Lanczos [lan1,ger3]. Une généralisation de l'algorithme de Lanczos à des blocs est donnée par

$$\begin{aligned}
 0) \quad & T_0 = [0]_{N \times NA} \\
 1a) \quad & \hat{T}_{L1} = [K^{-1}]_{N \times N} [b]_{N \times NA} \\
 1c) \quad & T_{L1} = \hat{T}_{L1} Q_1 \text{ avec } Q_1^T [\hat{T}_{L1}^T M \hat{T}_{L1}] Q_1 = [I]_{NA \times NA} \\
 \dots & \\
 n+1a) \quad & \tilde{T}_{L_{n+1}} = (K^{-1} M) T_{Ln} \\
 n+1b) \quad & \hat{T}_{L_{n+1}} = \left[I - T_{Ln} (\tilde{T}_{Ln}^T M) - T_{L_{n-1}} (\tilde{T}_{L_{n-1}}^T M) \right] \tilde{T}_{L_{n+1}} \\
 n+1c) \quad & T_{L_{n+1}} = \hat{T}_{L_{n+1}} Q_{n+1} \text{ avec } Q_{n+1}^T [\hat{T}_{L_{n+1}}^T M \hat{T}_{L_{n+1}}] Q_{n+1} = [I]_{NA \times NA}
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

où l'orthogonalisation de l'étape nc peut être réalisée par toute méthode appropriée et il est important de noter que l'orthogonalisation par rapport aux deux sous-espaces de Lanczos précédents (étape nb) n'est pas toujours suffisante pour garantir l'indépendance numérique des vecteurs retenus (pour plus de détails sur ces problèmes voir la littérature sur l'algorithme de Lanczos dont [ger3,tra3]).

La base formée par les différents sous-espaces de Lanczos ($T_{Ln}, n \geq 1$) contient une très bonne approximation des modes basses fréquences et est généralement utilisée pour déterminer ceux-ci. A l'inverse, les modes basses fréquences de la structure forment clairement une bonne base pour obtenir une bonne approximation de la relation (4.4). Si les chargements sont décrits en terme de forces appliquées, les DDL d'application de ces forces (on nomme **interface** l'ensemble de ces DDL) sont, en l'absence de sollicitation ($u = 0$), cinématiquement libres. Les modes de la structure, qui comme on l'a vu apparaissent naturellement, sont donc appelés des modes à interface libre.

La base des modes libres ne donne pas par contre une réponse statique exacte. Il convient donc généralement de conserver le premier sous-espace de Krylov $T_{C1} = K^{-1}b$ (dont les vecteurs sont appelés **modes d'attache** (*attachment modes*)). Cette idée est à la base de la *méthode des accélérations modales* (initialement proposée par Lord Rayleigh [ray1]) et est reprise dans les méthodes de synthèse modale basée sur l'utilisation de modes libres [mac2,rub1]. On note enfin qu'en présence de modes de corps rigide, la définition des modes d'attache est légèrement modifiée (voir section 4.1.5).

4.1.3. Chargement représentatif en déplacement

On suppose maintenant que les chargements appliqués peuvent être décrits par des déplacements imposés sur un certain nombre de DDL dits d'interface et notés I (les autres DDL seront notés C pour complémentaire). La réponse à une excitation $\{q_I\}$ est donnée par

$$\{q(s)\} = \begin{Bmatrix} q_I \\ q_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{q_I\} \\ -[K(s)_{CC}^{-1}] [K(s)_{CI}] \{q_I\} \end{Bmatrix} \tag{4.8}$$

L'objectif d'une méthode de réduction de modèle est encore de représenter la relation entre q_I et q aussi précisément que possible. En l'absence d'autre information, on suppose que matrice d'entrée unité (q_I égal à l'identité à toutes les fréquences) est

représentative de l'ensemble des chargements considérés et on cherche à en déduire un choix de base T .

Comme pour le cas du chargement en force, on considère un développement de la flexibilité dynamique

$$\left[M_{CC}s^2 + K_{CC} \right]^{-1} \left[M_{CI}s^2 + K_{CI} \right] = \left[\sum_{j=0}^p (-s^2)^j \left[(K^{-1}M)^j K^{-1} \right]_{CC} + o(s^p) \right] \left[Ms^2 + K \right]_{CI} \quad (4.9)$$

Le terme constant (statique) de ce développement correspond à l'évaluation de (4.8) en $s=0$. La projection d'un modèle sur cette base est appelée condensation statique ou de Guyan [guy1]. Dans les application de synthèse modale [cra4, gla1], ces vecteurs sont généralement appelés **modes de contrainte** (*constraint modes*). On parle aussi de relèvement statique d'une déformation imposée sur l'interface. Les méthodes de condensation dynamique [oca1] utilisent un développement à une ou plusieurs fréquences non nulles.

L'utilisation des sous-espaces de Krylov liés aux DDL complémentaires $\left[(K^{-1}M)^j K^{-1} \right]_{CC} K_{CI}$ ne semble pas avoir été l'objet d'études particulières. Par contre, cette suite permet clairement de déterminer les modes de la structure à interface fixe ($q_I = 0$) utilisés dans la méthode de synthèse modale proposée par Craig et Bampton [cra4].

Par ailleurs pour les cas où l'interface ne contient que les DDL nécessaires à imposer une contrainte isostatique à la structure, les vecteurs $K_{CC}^{-1}M_{CI}$ sont traditionnellement appelés modes de **déchargement inertiel** (*inertia relief modes*). On note [cra3] que les sous-espaces engendrés par les bases mode de contrainte + déchargement inertiel et mode d'attache + mode de corps rigide sont égaux. D'un point de vue statique, considérer des déplacements ou des forces comme représentatifs est donc équivalent.

4.1.4. La méthode optimale

Devant la foison de méthodes de réduction existantes, on cherche évidemment à déterminer la meilleure. Sachant que la meilleure méthode dépend des chargements représentatifs, il est assez facile de construire des exemples ayant des chargements représentatifs de tel ou tel type et donc favorisant telle ou telle méthode.

Devant cette impossibilité de déterminer une meilleure méthode, il faut se rabattre sur la sélection d'une méthode donnant de meilleurs résultats en moyenne. Cette méthode devrait alors être utilisée par défaut dans un code industriel.

Dans les applications de prédiction de fonctions de transfert, les chargements sont donnés en force ou en déplacement et on sélectionne naturellement une méthode adaptée. Dans les applications de synthèse modale (voir section 4.3), on ne sait pas *a priori* quel chargement est représentatif. Cependant on s'aperçoit vite en pratique que les méthodes basées sur les modes libres sont très souvent moins efficaces que celles basées sur les modes à interface fixe ou chargée. Il semble assez difficile de justifier ce résultat pratique de manière générale.

On peut cependant noter que les modes libres sont très souvent assez colinéaires aux modes statiques ce qui rend difficile la prédiction des modes pour des bords rigides ou

très raides. Pour le maillage rectangulaire d'éléments de plaque montrée en figure 4.1, on considère ainsi la prédiction de la première fréquence encastrée par un modèle de type Rubin (mode libres + modes de contraintes associés à la partie encastrée). Les courbes de la figure 4.50 montrent pour 1, 2, 3 ou 4 bords fixes qu'il faut toujours un nombre significatif de modes libres pour prédire la première fréquence encastrée. En particulier pour un bord encastré, on a en retenant 10 modes libres une erreur de plus de 10%.

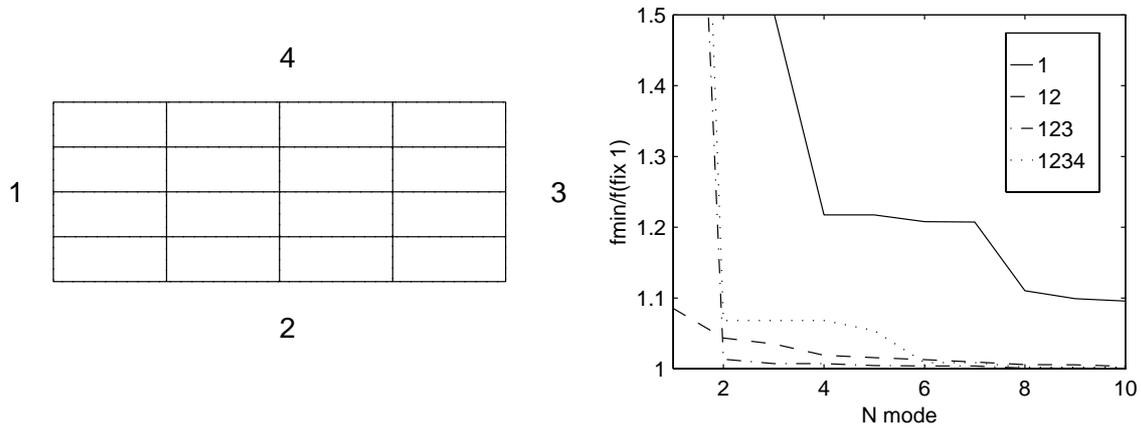


Fig. 4.1: Erreur relative sur la prédiction de la première fréquence encastrée pour un modèle de type Rubin (de 1 à 10 modes libres et modes de contraintes) d'une plaque rectangulaire en flexion avec 1,2,3 ou 4 cotés encastrés.

Pour confirmer cette tendance générale, on a aussi considéré la fréquence maximale liée au modèle réduit et la fréquence minimale d'une projection du modèle sur un sous-espace orthogonal en masse au sous-espace de réduction. Comme indiqué en section 4.2.2, ces mesures sont fortement liées à la notion de directions principales. Bien que l'avantage d'une réduction utilisant des modes fixes apparaisse parfois, ces mesures ne semblent pas suffisamment discriminantes pour être utilisées de manière robuste.

4.1.5. Traitement des modèles à modes de corps rigide

Comme on l'a vu dans les sections précédentes, de nombreuses méthodes utilisent le calcul de réponses statiques pour construire un base de réduction. Les structures et surtout les composants ayant souvent des conditions aux limites libre-libre, il est indispensable de bien définir la notion de réponse statique en présence de modes de corps rigide (la matrice de raideur est singulière et les modes de corps rigide ϕ_R forment une base de son noyau).

On rappelle (voir le chapitre 2 pour plus de détails) les deux conditions d'orthogonalité associées aux modes normaux

$$[\phi]^T [M] [\phi] = [I] \text{ et } [\phi]^T [K] [\phi] = [\Omega^2] \quad (4.10)$$

Dans un cas sans modes de corps rigide la matrice Ω^2 est inversible, on peut déduire de (4.10) la relation d'inversion

$$[K]^{-1} = [\phi] [\Omega^2]^{-1} [\phi]^T = \sum_{j=1}^N \phi_j \omega_j^2 \phi_j^T \quad (4.11)$$

Dans le cas général, le modèle possède des modes flexibles ϕ_{Flex} et des modes de corps rigide ϕ_R associés à des fréquences nulles, car formant une base du noyau de la raideur. La réponse flexible statique d'un système peut donc être de manière générale définie comme la réponse statique associée aux modes flexibles

$$[q_{Flex}] = \sum_{j \in \{Flex\}} [\phi_j \omega_j^{-2} \phi_j^T] [b] = [\phi_{Flex}] [\Omega_{Flex}^{-1}] [\phi_{Flex}^T] [b] \equiv [K_{Flex}^{-1}] [b] \quad (4.12)$$

Un résultat d'algèbre linéaire bien connu [ger3] est que *le système linéaire* $[K][q] = [b]$ avec $\det(K) = 0$ *admet une solution si et seulement si le second membre* b *est orthogonal aux solutions* ϕ_R *du système linéaire adjoint* ($[\phi_R]^T [K] = 0$) autrement dit si

$$[\phi_R]^T [b] = 0 \quad (4.13)$$

Pour calculer la réponse flexible à un chargement quelconque b , on commence donc par projeter cette charge sur le sous-espace des chargements orthogonaux à ϕ_R et ne modifiant pas la réponse flexible (la charge b_{Flex} est dite autoéquilibrée)

$$[b_{Flex}] = [b] - [M\phi_R][\phi_R^T M\phi_R]^{-1} [\phi_R^T b] \quad (4.14)$$

On décompose ensuite la structure en 2 groupes de DDL. R introduisant une contrainte isostatique des modes de corps rigide et Iso pour les autres. Par définition d'une contrainte isostatique, les modes de corps rigide (non normalisés en masse) peuvent être écrits sous la forme

$$[\phi_R] = \begin{bmatrix} I \\ -K_{Iso}^{-1} K_{IsoR} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

De la condition d'orthogonalité (4.13) on déduit que

$$[b_{Flex}] = \begin{bmatrix} b_{R, Flex} \\ b_{Iso, Flex} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{RIso} K_{Iso}^{-1} \\ I \end{bmatrix} [b_{Iso, Flex}] \quad (4.16)$$

d'où on tire

$$[K] \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{Iso}^{-1} \end{bmatrix} [b_{Flex}] \right) = \begin{bmatrix} 0 & K_{RIso} K_{Iso}^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} [b_{Flex}] = \begin{bmatrix} K_{RIso} K_{Iso}^{-1} \\ I \end{bmatrix} [b_{Iso, Flex}] = [b_{Flex}] \quad (4.17)$$

qui démontre que la réponse

$$[q] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{Iso}^{-1} \end{bmatrix} [b_{Flex}] \quad (4.18)$$

est solution du problème $[K][q] = [b_{Flex}]$. La charge b_{Flex} étant orthogonale aux modes de corps rigide, la réponse (4.17) et la réponse flexible ne diffèrent que par un mouvement de corps rigide. La réponse flexible n'ayant aucune composante rigide, il suffit d'orthogonaliser q par rapport aux modes de corps rigide pour trouver la réponse flexible. La réponse flexible est donc donnée par

$$[K_{Flex}^{-1}] = \begin{pmatrix} [I] - [\phi_R][\phi_R^T M \phi_R]^{-1}[\phi_R^T M] & 0 \\ 0 & K_{Iso}^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [I] - [M \phi_R][\phi_R^T M \phi_R]^{-1}[\phi_R^T] \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

où contrairement à l'expression (4.12) le calcul des modes flexibles n'est pas nécessaire. Noter que dans les cas sans modes de corps rigide $K_{Flex}^{-1} = K^{-1}$ et que dans tous les cas $[K_{Flex}^{-1}][K][K_{Flex}^{-1}] = [K_{Flex}^{-1}]$.

L'expression (4.19) de la réponse flexible correspond à un inverse généralisé dont l'utilisation est assez répandue. Sa détermination numérique pose bien sur de nombreux problèmes liés en particulier au choix du zéro numérique caractérisant les modes de corps rigide. On trouvera une analyse détaillée de ce problème en Ref. [far5].

4.2. Réduction et norme en énergie

4.2.1. Directions principales dans une base de réduction

La décomposition en valeurs singulières est un outil mathématique classique permettant de sélectionner des directions importantes dans un sous-espace. La forme générale de la décomposition d'une matrice T est

$$[T]_{N \times NR} = [U]_{N \times N} [S]_{N \times NR} [V]_{NR \times NR}^T \quad (4.20)$$

où S est une matrice diagonale (les éléments de la diagonale sont appelés valeurs singulières, et les matrices de vecteurs singuliers droite V et gauche U sont unitaires (les vecteurs singuliers forment des bases orthonormales).

Dans la définition mathématique classique, les bases sont unitaires au sens de la norme euclidienne. Or il est bien connu en mécanique que la norme euclidienne ne permet pas de prendre en compte l'inhomogénéité des propriétés de matériau ou de type de DDL (translation/rotation). Il est donc plus approprié de considérer des variantes de la décomposition en valeurs singulières utilisant des bases unitaires au sens de la norme en énergie de déformation ou en énergie cinétique (voir Ref. [bal16]).

On notera en particulier que le calcul des modes normaux du modèle (4.3) (projection sur la base de déplacement T) conduit à la décomposition en valeurs singulières

$$[U] = [T][\phi_R^T][T^T M T][\Omega], \quad [S] = [\Omega^{-1}], \quad [V] = [\phi_R] \quad (4.21)$$

pour laquelle les vecteurs singuliers gauches sont orthonormaux par rapport à la raideur (soit $U^T K U = I$) et les vecteurs singuliers droits sont orthogonaux par rapport à la masse projetée sur la base T (soit $V^T (T^T M T) V = I$).

Les plus grandes valeurs singulières de cette décomposition sont associées aux plus petites fréquences. On retrouve le résultat attendu qu'à énergie cinétique unitaire, les directions les plus importantes dans le sous-espace sont associées aux énergies de déformation et donc aux fréquences les plus faibles. Pour une matrice T unité, la décomposition en valeurs singulières confirme donc le résultat naturel qu'en l'absence

d'informations sur les chargements, le meilleur résultat est obtenu en conservant les modes basses fréquences.

L'intérêt de présenter ce résultat sous forme d'une décomposition en valeurs singulières est que cela permet de comprendre que ce même principe peut être appliqué de manière systématique quelle que soit la base T considérée. On a pu ainsi sélectionner des modes de contraintes principaux pour réduire la taille de modèles d'interface [bal20], ou des directions importantes pour des modèles réduits paramétrés [bal17,bal18].

On notera enfin une utilité numérique aux décompositions proposées. L'indépendance des vecteurs d'une base de réduction T n'est théoriquement pas nécessaire. En pratique, l'utilisation de vecteurs répétés ou presque colinéaires conduit à des matrices non inversibles ou très mal conditionnées. Pour les applications numériques considérées, il est donc rapidement apparu comme essentiel de garantir l'indépendance des vecteurs de T d'une manière efficace. La décomposition en valeurs singulières de la matrice T permet de construire une base de vecteurs orthogonaux et donc d'éliminer les directions répétées *a posteriori* par troncature des directions associées à des valeurs singulières trop faibles.

4.2.2. Mesure d'erreur pour un modèle modal

Pour de nombreuses applications, le problème principal est de calculer les premiers modes du système. Une analyse des qualités respectives de différentes méthodes de réduction passe donc par une mesure de l'erreur associée à la prédiction d'un ensemble de modes. L'approche classique est de comparer fréquences et vecteurs propres approximatifs avec les valeurs exactes. Cette approche a deux défauts principaux. Il est nécessaire de calculer la solution exacte et d'apparier les modes pour les comparer. Cette dernière étape peut poser de gros problèmes pour des structures à forte densité modale où la forme d'un mode peut être arbitrairement sensible à de petites erreurs, sans pour autant correspondre à des changements du comportement physique modélisé (voir section 2.3.2).

Pour mesurer l'erreur associée à un mode normal approximatif $\phi_{j,n}$, on propose donc d'utiliser le *chargement de déséquilibre*

$$\{b_{j,n}\} = [-M\omega_{j,n}^2 + K]\{\phi_{j,n}\} \quad (4.22)$$

qui correspond au second membre nécessaire à la vérification des équations d'équilibre et est clairement d'autant plus petit que les erreurs sur la fréquence et la forme du mode normal sont faibles (pour le mode exact, le chargement de déséquilibre est nul).

Toute norme sur ce chargement peut être utilisée. Cependant seule une norme à motivation physique, telle que la norme en énergie de déformation, permet de prendre en compte les hétérogénéités de propriété de différents degrés de liberté (translation/rotation par exemple) ou composants de la structure. L'utilisation de la norme en énergie demande cependant la définition de vecteurs de déplacement associés à la charge de déséquilibre. L'approche la plus simple est d'utiliser la réponse statique à la charge considérée. Cette réponse correspond à une généralisation des modes d'attaches associant un déplacement $q_{j,nFlex}$ aux charges $b_{j,n}$ (réponse flexible définie en section 4.1.5) et la mesure d'erreur associée est donnée par

$$e_{j,n} = \{q_{j,nFlex}\}^T [K] \{q_{j,nFlex}\} = \{b_{j,n}\}^T [K_{Flex}^{-1}] \{b_{j,n}\} \quad (4.23)$$

Cette expression ne tient pas compte du fait que les charges de déséquilibre sont calculées à la fréquence de résonance estimée. Mais ceci est justifié dans la mesure où les caractéristiques spatiales et la norme du vecteur de charge sont conservées.

La mesure (4.23) résout non seulement le problème du calcul exact qui n'est plus nécessaire mais aussi le problème de la forte densité modale. En effet, la sensibilité des formes propres est liée à des recombinaisons de modes voisins en fréquence [bal6]. Ces modes étant voisins en fréquence, il est clair que toute combinaison linéaire des modes exacts sera aussi associée à une charge de déséquilibre faible.

La mesure (4.23) ne donne cependant pas une mesure sur un ensemble de modes (différentes valeurs de j) qui permettrait de juger directement de la qualité d'un modèle. Utiliser le maximum ou la somme des carrés des erreurs $e_{j,n}$ est bien sûr une approche possible. Ces mesures supposent cependant que les erreurs représentatives sont associées à un seul mode. On propose donc une extension consistant à définir une norme pour la matrice des énergies de déformation associée à l'ensemble des charges de déséquilibre

$$e_n = \|E_n\| = \|[q_{nFlex}]^T [K] [q_{nFlex}]\| = \|[b_n]^T [K_{Flex}^{-1}] [b_n]\| \quad (4.24)$$

L'utilisation des termes extra diagonaux de E_n permet des combinaisons linéaires unitaires des erreurs et donc la prise en compte du fait que les erreurs sur un mode donné dépendent des erreurs sur les autres modes. Pour se convaincre de ce fait, il suffit de vérifier que l'orthogonalisation en masse et/ou raideur d'un mode exact par rapport à un mode approximatif détériore presque toujours le mode exact.

Toute norme de la matrice E_n pourrait être considérée. Les matrices de raideur K et de flexibilité K_{Flex}^{-1} étant symétriques semi-définies positives, E_n l'est aussi. Les normes matricielles semblent donc les plus appropriées. Elles assurent en effet une bonne pondération des erreurs sur les différents vecteurs propres. Le calcul d'une norme matricielle demande la définition d'une norme sur le sous-espace des déplacements considérés. Une telle norme est décrite par une matrice Q symétrique positive définie et conduit à une expression de la norme matricielle de la forme

$$e_n = \|E_n\| = \max_{\{u\} \neq \{0\}} \frac{\{u\}^T [q_{nFlex}]^T [K] [q_{nFlex}] \{u\}}{\{u\}^T [Q] \{u\}} \quad (4.25)$$

Le choix le plus simple pour Q est l'identité. Il est clair que la mesure e_n correspond alors à la plus grande valeur singulière de la décomposition de la matrice $[q_{nFlex}]^T [K] [q_{nFlex}]$.

Prenons par exemple, le panneau raidi considéré montré en figure 4.2. On utilise une réduction de modèle de type Craig-Bampton [cra4] avec un petit nombre de modes de contraintes généralisés (voir section 4.1.3). (Note: il s'agit dans [bal17] de la réduction NFI). Pour la comparaison on utilise l'erreur relative moyenne sur la fréquence des 10 premiers modes flexibles, la moyenne des termes diagonaux du MAC (2.52) et l'erreur e_n .

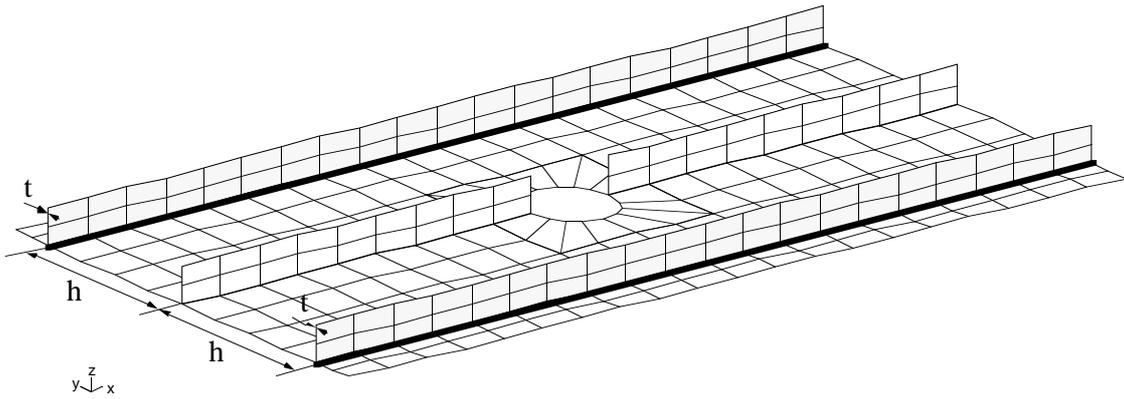


Fig. 4.2: Prédiction des modes par synthèse modale pour un panneau raidi [bal17].
Les composants sont le panneau principal et les deux raidisseurs externes.

La comparaison donnée dans table 4.20 montre clairement la bonne corrélation entre les différents indicateurs. On voit cependant dans le cas $h=0.09m$ et $t=0.007m$ que les critères sur la fréquence et le MAC semblent indiquer une erreur plus significative. C'est un cas où deux modes proches en fréquence se sont recombinaés et ou aucune de leurs déformées modales ne ressemble donc aux modes exacts. Le critère en énergie indique au contraire une très bonne corrélation ce qui est plus approprié car la structure est bien modélisée.

Table 4.1: Comparaison de critères d'erreur pour une réduction de type Craig-Bampton [bal17].

	h (m)	Δf (%) moyen			MAC (%) moyen			e_n (* 10^{-3})		
t (m)		0.007	0.014	0.021	0.007	0.014	0.021	0.007	0.014	0.021
	0.12	0.34	0.22	0.19	99.89	99.89	99.89	1.22	0.98	0.99
NFI	0.09	1.96	0.21	0.22	90.05	99.52	99.89	0.44	1.22	1.09
n=40	0.06	0.05	0.10	0.12	99.99	99.98	98.97	0.28	0.52	0.52

L'approche proposée permet une comparaison simple et robuste de différentes méthodes de réduction. Par ailleurs elle présente l'avantage significatif de ne pas demander la connaissance de la solution exacte. Une normalisation de la mesure d'erreur serait nécessaire pour pouvoir juger de la qualité d'une prédiction unique (plutôt que de comparer deux prédictions). La comparaison avec l'énergie de déformation moyenne des modes calculés semble une voie prometteuse, mais le nombre de cas traités ne permet pas pour le moment de conclusions quant à l'utilité pratique.

4.2.3. Correction itérative d'un modèle réduit

Pour une prédiction de modes dont on détermine, à l'aide de (4.25) par exemple, qu'elle est associée à une assez grande erreur, on propose maintenant une approche permettant une correction rapide. Dans la méthode de calcul des valeurs propres dites d'itérations sur sous-espaces [bat1], une itération de la méthode consiste à calculer une base corrigée

$$[\hat{\phi}_{n+1}] = [K_{Flex}^{-1}] [M][\phi_n] \quad (4.26)$$

pour le sous-espace dans lequel on cherche les vecteurs propres ϕ_{n+1} . Pour un bloc de vecteurs propres initiaux ϕ_n , les réponses flexibles associées aux chargements de déséquilibre peuvent s'écrire

$$[\tilde{\phi}_{n+1}] = [K_{Flex}^{-1}](-[M][\phi_n][\Omega_n] + K[\phi_n]) = -[\hat{\phi}_{n+1}][\Omega_n] + [\phi_n] \quad (4.27)$$

où il est supposé que les modes de corps rigide sont connus et que $\phi_R^T M \phi_n = 0$.

La base de vecteurs $[\phi_n \quad \tilde{\phi}_{n+1}]$ (estimation de rang n et réponses caractéristiques de l'erreur) contient clairement la base de rang $n+1$ (4.26) utilisée dans la méthode des sous-espaces. Une correction de l'estimation ϕ_n peut donc être obtenue en calculant les vecteurs propres associés à une projection du modèle sur la base $[\phi_n \quad \tilde{\phi}_{n+1}]$ (dont on ne conservera en général que la moitié). Étant donné que le sous-espace engendré par $[\phi_n \quad \tilde{\phi}_{n+1}]$ contient $\hat{\phi}_{n+1}$, on a la garantie que la correction proposée est plus précise que l'utilisation d'une itération de la méthode des sous-espaces. En fait on se convaincra facilement, qu'elle donne le même résultat qu'une itération de la méthode de Lanczos généralisée à des blocs.

Ces résultats montrent le lien de la correction proposée avec les méthodes de calcul de valeurs propres classiques. Il est de plus possible de ne conserver que les directions principales (voir section 4.2.1) du sous-espace engendré par $\tilde{\phi}_{n+1}$. En pratique ceci n'est cependant intéressant que pour améliorer le conditionnement numérique de l'étape de correction.

Table 4.2: Évaluation de la correction pour les modèles NFI, NFR et NEX ($h=0.09m$) de Ref. [bal17].

		Δf (%) moyen			MAC (%) moyen			e_n (*10 ⁻³)		
		7	14	21	7	14	21	7	14	21
NFI n=40	Initial	1.96	0.21	0.22	90.05	99.52	99.89	0.44	1.22	1.09
	Corrigé	0.03	0.00	0.00	99.99	100.00	100.00	0.55	0.04	0.04
NFR n=54	Initial	1.71	0.21	0.22	99.36	98.84	93.09	2.10	2.66	3.53
	Corrigé	0.00	0.00	0.06	100.00	100.00	93.74	0.09	0.09	0.11
NEX n=54	Initial	1.71	0.21	0.22	99.31	98.90	93.41	2.10	2.59	3.38
	Corrigé	0.03	0.00	0.06	100.00	100.00	93.74	0.09	0.09	0.12

On trouvera un exemple d'application de cette méthode de correction en [bal16]. Pour l'illustrer ici considérons plutôt le panneau raidi de la figure 4.2 et comparons les différentes mesures d'erreur avant et après correction pour les modèles considérés. Pour les 9 cas montrés dans la table 4.2 il y a une nette amélioration des trois critères considérés. Pour le modèle NFI $t=7mm$, on note un modèle initial imprécis et une détérioration du critère en énergie après correction. Pour les modèles NFR et NEX $t=21mm$, le MAC ne s'améliore que de manière marginale (un des modes reste mal corrélé). Ces petites limitations ne font cependant qu'indiquer que l'approche de correction proposée peut, comme toute méthode itérative, demander plus d'une itération.

4.3. Modélisation des systèmes couplés

Dans de très nombreuses applications, des modèles réduits de composants sont disponibles et l'on cherche à obtenir une prédiction de la réponse couplée. Bien que l'on ne se soit intéressé ici qu'au couplage structure/structure (sous-structuration synthèse modale, décomposition de domaine, etc.), les couplages fluide/structure (aéroélasticité, acoustique, etc.), structure/électromagnétisme (structures actives), structure/thermique peuvent aussi être considérés dans le cadre de méthodes de réduction très similaires.

Les résultats présentés ici sont l'objet des Refs. [bal15,bal20]. Des applications peuvent par ailleurs être trouvées dans les Refs. [bal17,bal22].

4.3.1. Formes de couplages

Comme indiqué dans la figure 4.3, on peut de manière très générale considérer le couplage de systèmes dynamiques comme étant la réponse en boucle fermée de différents composants (H_1, H_2, \dots) couplés par un retour H_{int} . On considère ici, l'interface entre sous-structures comme une zone physique dont le volume tend vers 0 pour une liaison parfaite. L'interface a des points communs avec toutes les sous-structures et peut correspondre à des zones non connexes. Les sous-structures sont par contre supposées totalement disjointes (sauf bien sûr à la limite d'une interface d'extension nulle).

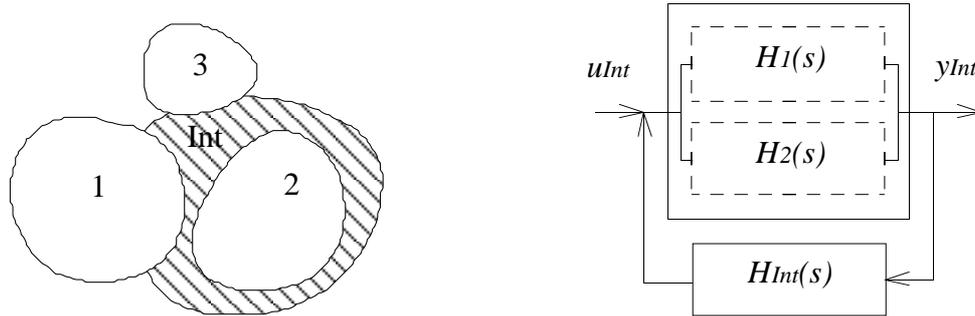


Fig. 4.3: Couplage de modèles de composants disjoints à l'aide d'un modèle d'interface d'extension finie. On appelle liaison parfaite la limite correspondant à une interface d'extension nulle.

Bien que la représentation par des modèles d'état soit plus générale, on se limitera ici aux modèles du second ordre caractérisés par la donnée de leur raideur dynamique, car ils sont habituels en mécanique. En l'absence de couplage (boucle ouverte), les modèles de plusieurs sous-structures peuvent être juxtaposés, comme ci-dessous pour deux sous-structures

$$\begin{bmatrix} K_1(s) & \\ & K_2(s) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \{u(s)\} \quad (4.28)$$

$$\{y(s)\} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}$$

Ce modèle ne caractérisant que la réponse découplée des composants, on doit construire un modèle de l'interface. On suppose que la déformation de l'interface peut être calculée à partir de la donnée sur les zones de jonction communes aux sous

structures et à l'interface. La méthode de discrétisation utilisée pour chaque sous-structure permet toujours de caractériser les champs de déplacement, déformation et éventuellement contrainte en un point X comme des fonctions linéaires des DDL et indépendantes de la fréquence

$$\{y_j(X, s)\} = [c_{j\text{int}}(X)]\{q_j(s)\} \quad (4.29)$$

Pour un état arbitraire des composants caractérisé par la donnée des q_j , il est donc possible de définir des conditions aux limites conduisant à un problème bien posé pour le modèle continu de l'interface. D'un point de vue discret, les champs donnés sur les jonctions sont caractérisés par un nombre fini de déplacements généralisés d'interface dépendant linéairement des DDL de composants $\{y_{j\text{int}}\} = [c_{j\text{int}}]\{q_j\}$. Le traitement de maillages incompatibles est basé sur le choix de ces déplacements en fonction de la discrétisation du modèle d'interface et non en fonction de celle des composants.

Une fois les déplacements généralisés d'interface définis, le modèle discrétisé du comportement de l'interface prend la forme suivante

$$\begin{bmatrix} K_{jj\text{int}} & \cdots & K_{Cj\text{int}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{jC\text{int}} & \cdots & K_{CC\text{int}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [c_{j\text{int}}]\{q_j\} \\ \vdots \\ q_{C\text{int}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{j\text{int}} \\ \vdots \\ \{0\} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

où les déplacements généralisés d'interface $\{y_{j\text{int}}\} = [c_{j\text{int}}]\{q_j\}$ et les chargements associés aux éventuels DDL complémentaires $q_{C\text{int}}$ sont donnés (ces derniers sont donnés nuls en général comme indiqué dans (4.30)).

De manière habituelle, les déformations généralisées d'interface sont simplement les DDL de noeuds communs à la sous-structure et à l'interface. La distinction devient vraiment importante dans le cas de maillages incompatibles ou de réduction de la représentation de l'interface (voir section suivante). Selon les cas les conditions continues (4.29) définissant le problème d'interface sont prises en compte de manière forte ou faible, conduisant ainsi à une description discrétisée conforme ou non.

En supposant pour simplifier l'écriture que l'interface n'a pas de DDL complémentaires, le modèle (4.30) de l'interface conduit à un modèle de la réponse couplée de la forme

$$\left(\begin{bmatrix} K_1 & \\ & K_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{1\text{int}}^T & 0 \\ 0 & c_{2\text{int}}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{\text{int}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{1\text{int}} & 0 \\ 0 & c_{2\text{int}} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \{u\} \quad (4.31)$$

On s'intéresse maintenant au cas limite où l'extension de l'interface tend vers zéro. A la limite, l'interface contient les points communs à toute paire de sous-structures. Pour une interface suffisamment petite, il est possible de définir des déplacements généralisés d'interface permettant de comparer directement le déplacement relatif de deux sous-structures (donner un sens à $y_{j\text{int}} - y_{2\text{int}}$) et ceci même en présence de maillages incompatibles.

L'énergie de déformation liée à un déplacement relatif imposé non nul tend clairement vers l'infini quand l'extension de l'interface tend vers zéro. Par contre, on s'attend à ce que cette énergie reste nulle pour un déplacement relatif nul. Pour toute

bonne formulation du problème, la limite d'une interface d'extension nulle devrait donc conduire à une solution à déformation relative nulle, c'est à dire vérifier

$$\{y_{1int} - y_{2int}\} = [c_{1int} \quad -c_{2int}] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad (4.32)$$

En mécanique des milieux continus, une liaison parfaite (interface d'extension nulle) est caractérisée par des lois de continuité ou de saut pour les champs de déplacement (e.g. $u_1(X) = u_2(X)$) et/ou de contrainte (e.g. $\bar{\sigma}_{ij}\bar{n}_j = 0$) applicables sur des points, lignes, surfaces communs aux composants et pouvant être données sous la forme générale

$$(y_1(X) - y_2(X)) = 0 \quad \forall X \in (\Omega_1 \cap \Omega_2) \quad (4.33)$$

Pour un modèle discrétisé, les conditions (4.33) conduisent clairement à un nombre fini de contraintes pouvant toujours être écrites sous la forme (4.32).

Pour des conditions de la forme (4.32) on parle de **conditions aux limites généralisées**. Les y représentant généralement des déplacements on parle de conditions cinématiques, essentielles ou de Dirichlet. Dans certains cas (voir section 4.3.5), les conditions (4.32) peuvent en fait s'écrire sous la forme

$$[c_{int}][K]\{q\} = 0 \quad (4.34)$$

on parle alors des conditions aux limites généralisées statiques, naturelles, ou de Neumann.

Il est utile de noter que l'approche duale pour le traitement des conditions essentielles de type (4.32) consiste à ajouter aux DDL du modèle découplé des multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes. On trouve alors la forme habituelle des formulations mixtes de la méthode des éléments finis [zie1]

$$\begin{bmatrix} K(s) & c_{int}^T \\ c_{int} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.35)$$

Une approche classique de résolution de problèmes contraints de la forme (4.35) consiste à pondérer les contraintes, c'est à dire à poser $\lambda = ([I]_{NI \times NI} / \varepsilon)[c_{int}]\{q\}$ avec ε petit. Ceci conduit à un modèle couplé de la forme

$$\left(\begin{bmatrix} K_1 & \\ & K_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{1int}^T \\ -c_{2int}^T \end{bmatrix} \frac{[I]}{\varepsilon} [c_{1int} \quad -c_{2int}] \right) \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \{u\} \quad (4.36)$$

où la pondération apparaît clairement comme un raideur d'interface tendant vers l'infini quand ε tend vers 0. La sélection d'une pondération adaptée au problème peut être difficile particulièrement si les propriétés de matériaux ne sont pas homogènes, la sélection d'une zone d'interface finie peut donc être considérée comme une alternative à ce choix.

4.3.2. Discrétisation des interfaces

Que l'on considère une liaison parfaite ou une interface d'extension finie, la validité de la prédiction couplée dépend en grande partie du choix des déplacements d'interface.

Une première approche, que l'on dit ponctuelle, consiste à choisir des déplacements de points particuliers. Le cas classique correspond aux maillages compatibles, on prend alors les DDL des noeuds communs à deux sous-structures (pour une liaison parfaite) ou communs aux sous-structures et à l'interface (dans le cas général). L'extension la plus simple consiste à utiliser les fonctions de forme des éléments liés au modèle de composant pour construire des noeuds intermédiaires. La figure 4.4 montre ainsi un exemple de jonction de maillages solide/plaque avec des éléments de tailles différentes.

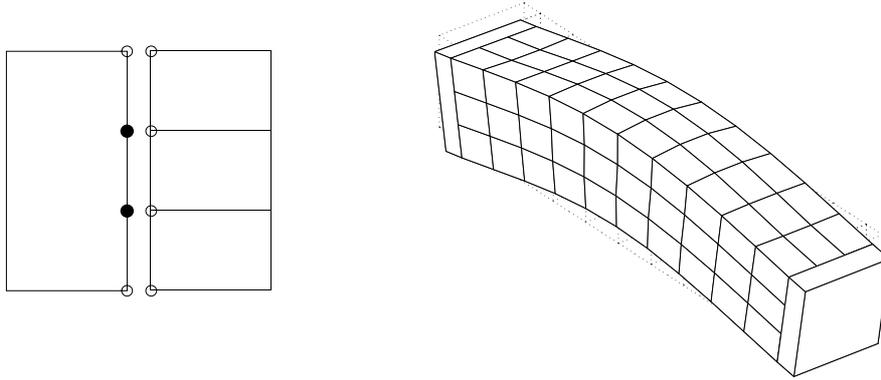


Fig. 4.4: Utilisation de déplacement de noeuds de maillage ○ et/ou de noeuds intermédiaires ● comme déplacement généralisés d'interface. Exemple d'application à un maillage incompatible (voir détails en [bal22]).

Différents auteurs (dont Ref. [far1]) considèrent les conditions de continuité (4.33) sous forme intégrale. La solution discrétisée est alors obtenue par orthogonalisation par rapport à un espace vectoriel de dimension finie V_λ (dont les éléments représentent des forces appliquées à l'interface et Γ est l'ensemble des points communs)

$$\int_{\Gamma} \lambda (y_1 - y_2) d\Gamma = 0, \quad \forall \lambda \in V_\lambda \quad (4.37)$$

Pour $(y_1 - y_2)$ et λ pris dans des sous-espaces de dimension finie, cette approche conduit clairement à un nombre fini de conditions de la forme (4.32). Cependant, les déplacements d'interface associés sont des combinaisons linéaires de tous les DDL conduisant à un déplacement des points de Γ . Les mêmes DDL interviennent dans la définition, utilisée par l'approche ponctuelle, des déplacements nodaux des points de maillage et des points intermédiaires. En pratique toute formulation intégrale peut donc être considérée comme une forme pondérée d'une formulation ponctuelle. La principale utilité d'une telle pondération est de permettre de relaxer des contraintes et donc dans certains cas d'éviter les phénomènes de verrouillage mis en évidence en section 4.3.3.

L'idée d'utiliser un espace vectoriel de forces d'interface conduit naturellement à considérer un espace dual de déformations distribuées de l'interface. Il s'agit alors de combiner plusieurs déformations de l'approche ponctuelle pour créer une déformation généralisée ayant des valeurs non nulles sur la plupart de noeuds de l'interface. Si la construction d'un tel sous-espace permet de représenter l'ensemble des déformations

effectivement trouvées, on peut réduire les modèles de composant en conséquence (modes de contrainte généralisés [bal20]). Cette réduction des représentations d'interface est particulièrement utile pour des applications où une grande fraction des DDL de chaque composant sont liés à l'interface (jonctions de solides ou de plaques).

Les bases de fonctions de forme élément fini seraient un choix classique pour l'espace vectoriel de déformations d'interface. On peut ainsi (voir figure 4.5) considérer des fonctions de forme de poutre pour représenter les déformées d'une interface entre plaques. Une idée, plus efficace en terme de construction d'un modèle réduit de dimension minimale [bal15,bal20], est d'utiliser les modes d'un modèle local de l'interface (modèle contenant les éléments directement reliés à l'interface comme dans l'exemple de la figure 4.5). Comme indiqué en section 4.2.1, le calcul des modes de ce modèle local correspond à une sélection de directions principales ce qui explique l'efficacité constatée de la méthode.

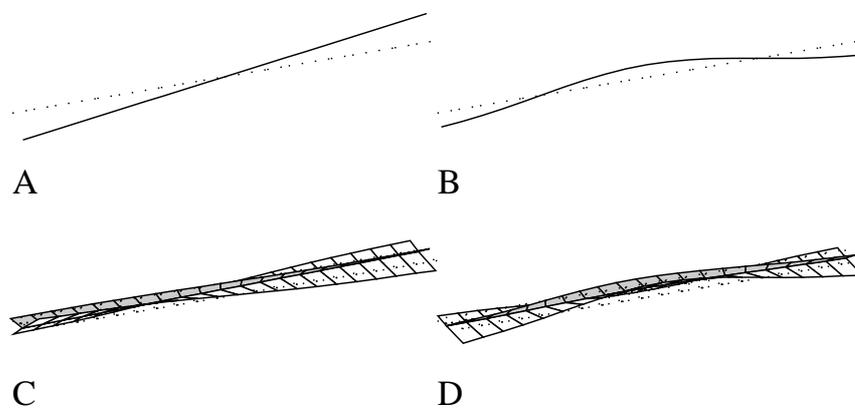


Fig. 4.5: **A-B** déformations généralisées liées aux fonctions d'interpolation d'éléments de poutre. **C-D** déformations généralisées liées à un modèle local.

4.3.3. Réduction, conformité et verrouillage

Dans le cadre des méthodes éléments finis, on sait depuis longtemps que les conditions de saut (4.29) étant définies sur des ensembles continus et donc infinis de points, il n'est pas forcément facile ni souhaitable d'assurer l'équivalence complète entre la condition discrète (4.32) et la condition continue (4.29). On a ainsi démontré l'utilité voire la supériorité d'éléments, dits non conformes, ne vérifiant pas toutes les conditions de continuité attendues. Connaissant le parallèle entre réduction et discrétisation, on se doit donc de prendre en compte, dans le cadre des méthodes de réduction de modèle, la conformité et ses effets sur la convergence (voir Refs. [bal15,bal17,bal20]).

Dans le cadre des méthodes de réduction, on peut avoir non conformité des éléments, des maillages, mais aussi des représentations réduites des déformations possible de l'interface. On cherche par exemple à prédire les fréquences des trois premiers modes du panneau raidi montré en figure 4.6.

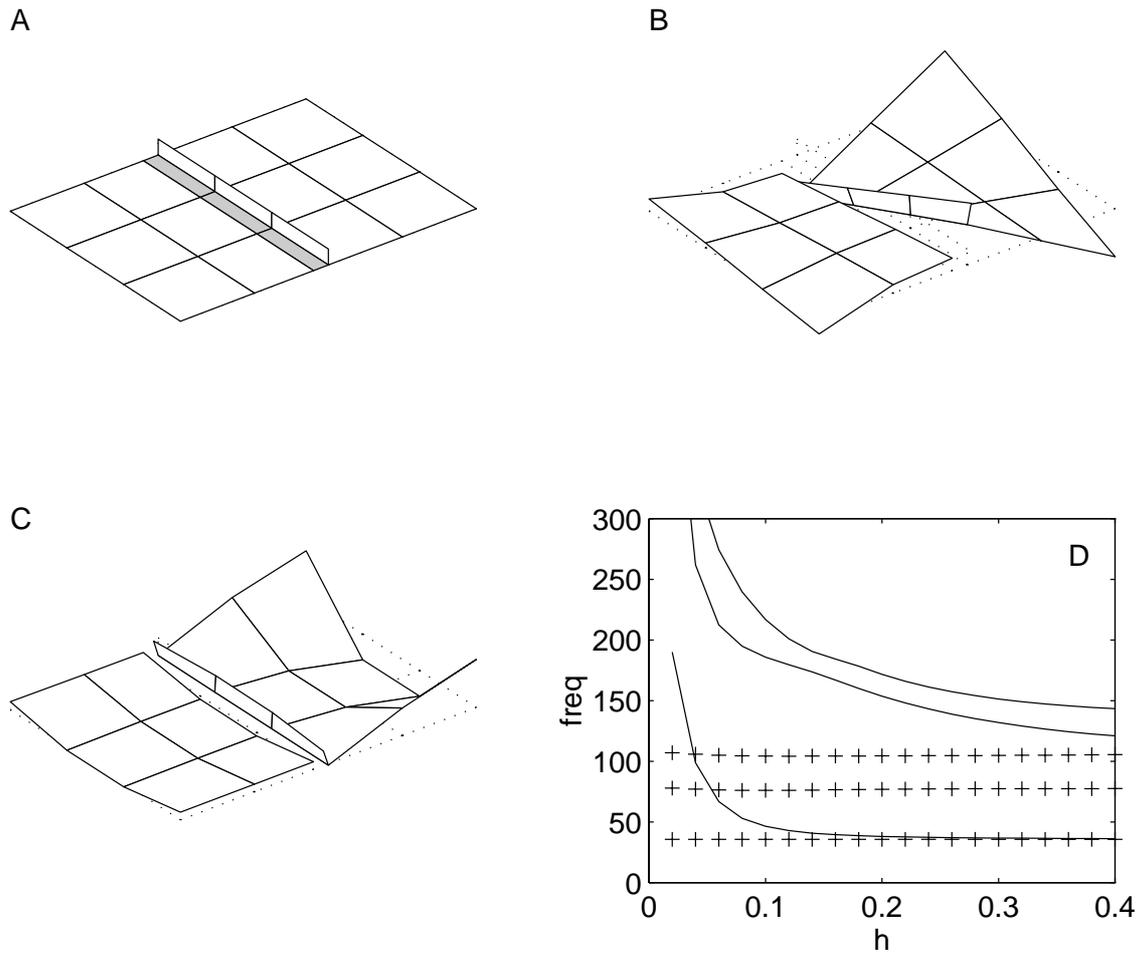


Fig. 4.6: Verrouillage d'interface pour un panneau raidi. **A** zone d'interface en grisé. **B-C** modes retenus de torsion et flexion des composants. **D** évolution des 3 premières fréquence du modèle (+) complet et (—) réduit en fonction de la largeur h de la zone d'interface.

La base retenue pour le modèle réduit couplé contient, pour chaque composant, les 6 modes de corps rigide et les 2 modes de torsion et flexion montrés sur la figure. L'évolution des fréquences, partie D de la figure, montre clairement le phénomène de verrouillage quand on se rapproche du cas limite de la liaison parfaite (les fréquences du modèle réduit tendent vers l'infini quand la largeur de l'interface tend vers 0). Le mode de torsion converge assez vite vers la valeur exacte (modèle complet). Ce n'est pas le cas des deux modes suivants (flexions), la flexion retenue pour le composant non raidi possède des propriétés de symétrie qui n'existent pas pour le composant raidi (voir partie C de la figure). Une bonne convergence demanderait de retenir plus de modes ou d'utiliser des conditions aux limites chargées en raideur pour le composant non raidi.

Le verrouillage lié à une interface parfaite s'explique de la manière suivante. Les conditions aux limites généralisées (4.32) sont déterminées avant réduction des modèles de composant. On a ici 4 noeuds associés à 6 conditions de continuité. La projection des conditions aux limites sur les bases T_j de réduction des composants conduit à

$$\begin{bmatrix} c_{Int1} T_1 & -c_{Int2} T_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{R1} \\ q_{R2} \end{Bmatrix} = 0 \quad (4.38)$$

Or les déformées d'interface retenues (restriction des modes de corps rigide, de torsion et de flexion à l'interface, 8 déformées par composant) ne sont pas équivalentes pour les 2 composants. Il en résulte que la projection (4.38) contient 10 conditions indépendantes. Sur un modèle découplé de 16 DDL (8 pour chaque composant), l'élimination exacte des conditions (4.38) conduit donc à un modèle à 6 DDL correspondant aux modes de corps rigide. L'incompatibilité des déformées d'interface empêche d'obtenir un mouvement flexible si la continuité exacte est vérifiée.

Comme dans le cadre élément fini, ce problème de verrouillage peut être traité en construisant une réduction conforme des modèles ou en acceptant une continuité au sens faible (relaxation de certaines contraintes).

Pour construire des modèles conformes, on définit ici [bal15,bal20] des modes de contraintes généralisés comme étant les déformations statiques du composant à des forces appliquées uniquement à l'interface et associées à des déformations généralisées d'interface unitaires. Pour une base de déformées généralisées d'interface commune à deux composants, les bases de modes de contrainte généralisés conduisent à des modèles conformes et ne présentant donc pas de problèmes de verrouillage. Cette approche correspond au relèvement statique de déformées données à l'interface seulement. La méthode de *modes de branche* [gla1] est similaire mais se restreint à considérer le composant principal comme une interface (extension statique dans les branches seulement). Le point crucial des applications proposées [bal15,bal20] est donc l'introduction de méthodes de sélection de déformées d'interface (voir aussi sections 4.2.1 et 4.3.2).

La relaxation de contraintes est plus complexe car il faut définir ce qu'est une discontinuité acceptable. L'utilisation, considérée ici, d'interfaces ayant une extension et des propriétés physiques est une voie d'étude possible. Ainsi dans l'exemple de la figure 4.6, on observe une bonne convergence du premier mode dès que la largeur de l'interface dépasse 0.2 m soit les 2/5èmes de la largeur maximale de la première rangée d'éléments. Par contre dans l'exemple du panneau raidi étudié en Ref. [bal20], l'étendue de l'interface (ressorts représentant les rivets de connexion entre panneau et raidisseurs) est trop faible pour réduire les effets de verrouillage de manière significative (la pénalisation est trop forte).

Même si les conditions initiales (4.32) l'étaient, les conditions d'interface réduites (4.38) ne sont souvent plus toutes indépendantes. Le traitement de conditions redondantes est tout à fait possible en prenant quelques précautions algorithmiques particulières (voir section 4.3.4), il ne donne cependant de bons résultats que si l'on évite les phénomènes de verrouillage illustrés ci dessus.

4.3.4. Traitement numérique des conditions de Dirichlet généralisées

Les conditions aux limites généralisées de type Dirichlet initiales (4.32) ou projetées (4.38) peuvent être traitées par élimination des contraintes (on parle d'approche directe ou primale) ou utilisation de multiplicateurs de Lagrange conduisant au système augmenté (4.35) (on parle d'approche duale). L'efficacité relative des deux approches dépend largement du programme utilisé et les travaux récents sur la méthode FETI [far3,far4] tendent à montrer que l'approche duale est particulièrement adaptée aux calculs sur machine parallèle.

Bien que la forme générale (4.32) soit très largement reconnue, l'approche habituelle est de réduire les composants de manière à permettre une élimination simple des contraintes. On utilise ainsi les modes normaux à interface fixe avec modes de contrainte [cra4], les modes normaux à interface libre avec les modes d'attache [mac2,rub1], voir définit des stratégies adaptées pour des cas mixtes [tra4]. L'idée de construire un algorithme général et robuste pour l'élimination d'un jeu de contraintes ne semble avoir été considéré de manière significative que dans le travail présenté ici.

On cherche donc une solution générale de la réponse du modèle juxtaposé (4.28) vérifiant des contraintes de type Dirichlet (4.32) ou (4.38). Dans une approche directe, cette solution est obtenue, après détermination d'une base T du noyau des contraintes

$$\text{vect}(T) = \ker(c_{int}), \quad (4.39)$$

par la projection du modèle

$$\begin{aligned} [T^T M T_s^2 + T^T C T_s + T^T K T] \{q_R\} &= [T^T b] \{u\} \\ \{y\} &= [cT] \{q_R\} \end{aligned} \quad (4.40)$$

Les facteurs suivant sont apparus comme importants lors du développement de l'algorithme FECOOR [bal2] utilisé pour toutes les applications de synthèse présentées dans ce mémoire.

- **Prise en compte des blocs.** Dans le cas courant où la contrainte impose l'égalité de deux DDL. Le vecteur du noyau associé à deux termes unité sur les deux DDL concernés et la projection correspond à une addition des termes liés au deux DDL. Il s'agit en fait de la procédure habituelle d'assemblage de la méthodes des éléments finis. De manière plus générale les contraintes ne relient que certains DDL entre eux et on gagne en temps et précision numérique à construire des vecteurs du noyau ayant des valeurs non nulles que sur les blocs de DDL reliés entre eux par des contraintes.
- **Indépendance des contraintes.** Il souvent difficile et donc pas souhaitable de garantir l'indépendance des contraintes après réduction. Pour des conditions définies sur les modèles non réduits, ceci permet en particulier de ne pas traiter toutes les interfaces comme des jonctions entre 2 composants (il y a redondance pour les points communs à plus de 2 composants). Pour des modèles réduits, la projection des conditions (4.32) sur les bases de réduction conduit aux conditions (4.38) qui ne sont indépendantes que si toutes les déformations possibles de l'interface sont représentées. Une décomposition QR ou une décomposition en valeur singulière de la matrice c_{int} permettent une très bonne détermination du nombre effectif de contraintes indépendantes et donc la construction du noyau réel. Pour certains cas d'interfaces entre plaques ou solides, le nombre de DDL liés en un bloc peut cependant être important et rendre le calcul de ces décompositions trop coûteux. La taille des pivots dans une décomposition LU peut être alors utilisée comme indication de l'indépendance des conditions. Ceci peut cependant conduire à une détérioration de la précision numérique.

Une raison pour ne pas utiliser cette approche générale serait le fait que les méthodes d'éliminations ad-hoc conduisent souvent à un modèle projeté (4.40) ayant une structure bloc particulière qui évite le calcul de la projection (voir les exemples usuels donnés en Ref. [cra3]). Le léger avantage sur le temps de calcul est cependant

bien mince face à la flexibilité permise par le découplage complet des phases de réduction et de synthèse obtenue avec l'élimination générale proposée. Le découplage des deux phases ne doit cependant pas faire oublier qu'une réduction arbitraire peut facilement conduire aux phénomènes de verrouillage mis en évidence en section 4.3.3. On note enfin que seuls des problèmes de conditionnement numérique pourraient introduire une différence entre les prédictions finales de différentes méthodes d'élimination.

4.3.5. Liens entre condition aux limites de Neumann et condensation statique

En mécanique des milieux continus, les conditions de nullité ou de continuité des contraintes normales ($\bar{\sigma} \bar{n}$) sont appelées conditions aux limites statiques, naturelles, ou de Neumann. Dans le cadre d'une méthode d'approximation en déplacement leur vérification n'est pas demandée. Pour un espace vectoriel de champs cinématiquement admissibles, leur prise en considération conduit à une minimisation sur un espace plus restreint et donc à une détérioration de la qualité des prédictions.

Les fonctions de forme utilisées pour la formulation élément fini et les lois de comportement permettent d'évaluer les contraintes en tout point et donc de construire des conditions de continuité de contrainte de la forme (4.32). La continuité des contraintes n'étant souvent pas assurée par les éléments, l'imposition directe d'une continuité exacte peut conduire à un phénomène de verrouillage (pas toujours cependant [jen1]).

Comme pour la continuité des déplacements, on peut éviter le verrouillage en imposant la continuité de manière faible. L'idée généralement retenue (méthode de MacNeal [mac2] par exemple) est d'imposer la continuité des contraintes généralisées associées à la discrétisation et données par le produit $[K]\{q\}$. A une condition cinématique généralisée $[c_{\text{int}}]\{q\} = 0$, on associe donc la condition statique duale correspondant à l'équilibre des contraintes généralisées et donnée par

$$[c_{\text{int}}][K]\{q\} = 0 \quad (4.41)$$

Il est toujours possible d'introduire une transformation des coordonnées q telle que la transformée de la matrice c_{int} soit l'identité pour les I premiers DDL et nulle pour les C autres (voir section 4.3.4). La condition (4.41) est alors donnée par $K_{II}q_I + K_{IC}q_C = 0$ d'où l'on tire

$$\begin{Bmatrix} q_I \\ q_C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_{II}^{-1}K_{IC} \\ I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_C \end{Bmatrix} \quad (4.42)$$

où un lecteur averti reconnaîtra une condensation statique ou de Guyan [guy1] des DDL d'interface q_I .

L'utilisation souvent faite de conditions sur l'équilibre des forces à l'interface [mac2,rub1,cra9,tra3] correspond donc à une condensation statique de certains (ou de tous les) DDL d'interface. Comme pour la condensation statique cette approximation n'est valable que si les forces d'inerties associées à ces DDL sont effectivement négligeables.

Au niveau du modèle continu, la condition de continuité des efforts normaux est basée sur le principe d'équilibre de l'action et de la réaction. Si, au lieu de discrétiser

cette condition continue, on appliquait le principe au niveau des modèles discrets, on devrait clairement introduire une condition sur l'équilibre dynamique des efforts généralisés. Ceci conduirait à des conditions de la forme

$$[c_{\text{int}}] [Ms^2 + Cs + K] \{q(s)\} = 0 \quad (4.43)$$

dont la prise en compte correspondrait à une condensation dynamique. L'élimination des DDL dans une condensation dynamique exacte introduit un modèle ayant une dépendance beaucoup plus complexe à la fréquence et dont la réponse correspond exactement à celle du modèle avant réduction [ocal]. Des conditions de la forme (4.43) ne présentent donc pas d'intérêt pratique sauf si elles sont pris en compte de manière approximative. La condition (4.32) correspond ainsi à une approximation quasistatique de l'équilibre dynamique (4.43).

4.4. Utilisation de résultats expérimentaux dans les modèles réduits

4.4.1. Modèles hybrides expérimentaux/analytiques

Pour une réduction par projection sur la base des modes normaux, les fréquences, matrices d'amortissement et matrices d'entrées/sorties modales analytiques sont directement comparables avec un modèle du second ordre identifié expérimentalement (section 3.2.3). Sans essayer de recalibrer le modèle analytique, il est donc possible de construire des modèles hybrides combinant données expérimentales et analytiques en utilisant dans le modèle analytique en coordonnées principales toutes ou certaines des valeurs expérimentales suivantes (voir détails en Ref. [bal9])

- amortissement modaux (en supposant l'amortissement proportionnel)
- matrice d'amortissement modal non diagonale
- fréquences modales
- modes propres étendus

Les modèles hybrides ayant certaines des caractéristiques dynamiques mesurées, ils sont généralement beaucoup plus précis que le modèle analytique initial. Par ailleurs, la base de projection utilisée pour les modes propres donne une estimation du déplacement en tout point, il devient donc possible de prédire toutes les fonctions de transfert possible même si elles n'ont pas été testées.

L'utilisation d'un modèle d'amortissement expérimental est très classique mais les nouvelles méthodes d'identification d'amortissement non proportionnel permettent de nouvelles extensions. Les limitations de tels modèles pour la synthèse modale sont abordées en section 4.4.2.

L'utilisation de fréquences modales expérimentales et éventuellement de modes propres expérimentaux étendus [oca2,roy3,smi2,lev7,hem2] plutôt que des modes analytiques est plus originale. Les résultats considérés dans les Refs. [bal3,bal8,bal9] permettent de dire que cette approche est tout à fait valable pour l'estimation de fonctions de transfert non mesurées. La figure 4.7 montre ainsi clairement comment un modèle hybride peut donner une réponse très précise même quand le modèle élément fini sous-jacent l'est bien moins et quand l'amortissement non proportionnel à une influence significative. Une réutilisation de tels modèles en synthèse modale ou pour d'autres prédictions couplées ne semble cependant pas prometteuse car les termes résiduels interviennent de manière significative mais ne sont pas corrigés.

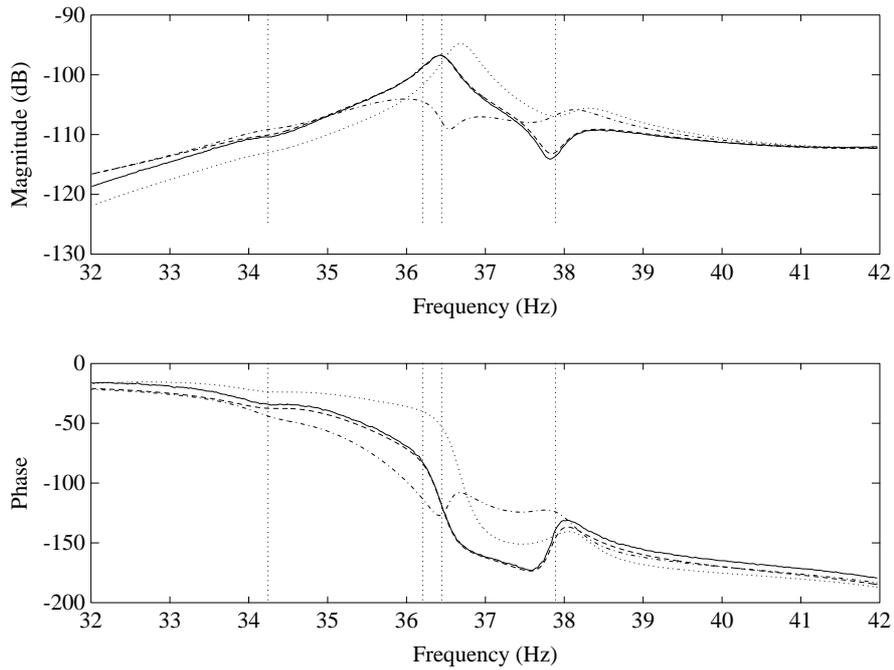


Figure 4.7: FRF au point d'excitation 5 et réponse au capteur 1 de l'interféromètre du MIT [bal3]. (—) Mesure, (---) modèle hybride basé sur d'autres mesures, (· · ·) modèle hybride à amortissement proportionnel, (- · -) modèle élément fini.

4.4.2. Synthèse modale en utilisant un amortissement expérimental

On obtient généralement de très bonnes prédictions en utilisant un modèle d'amortissement expérimental pour les modes testés. Cependant un modèle complet doit le plus souvent aussi contenir d'autres DDL (les termes qui correspondent à la correction statique utilisée pour les modèles réduits). Les propriétés de dissipation de ces DDL ne sont pas mesurables, il convient donc de savoir si leur influence est négligeable. Reprenant les résultats présentés en Ref. [bal12], on considère un modèle par bloc

$$\begin{bmatrix} s^2 I + s \Gamma_{DD} + \Omega_{DD} & s^2 M_{DC} + s C_{DC} + K_{DC} \\ s^2 M_{CD} + s C_{CD} + K_{CD} & s^2 M_{CC} + s C_{CC} + K_{CC} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{RD} \\ q_{RC} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{RD} \\ b_{RC} \end{bmatrix} \{u\} \quad (4.44)$$

$$\{y\} = \begin{bmatrix} c_{RD} & c_{RC} \end{bmatrix} \{q_R\}$$

où les modes notés D ont un équivalent identifié à partir de données expérimentales et les modes correctifs notés C sont des résultats de calculs élément fini (ou éventuellement d'une mesure expérimentale de la flexibilité résiduelle).

On construit naturellement un modèle hybride en utilisant une matrice d'amortissement modal expérimentale Γ_{DD} . Mais les contributions C_{CD} et C_{CC} ne sont pas connues. Comme indiqué en section 2.2.3, les contributions de l'amortissement ne sont importantes que près des résonances. Si tous les modes de la bande sont identifiés, le terme C_{CC} est associé à des modes haute fréquence et n'a donc qu'une influence négligeable. De même le critère de séparation en fréquence (2.36) indique que l'effet de C_{CD} est aussi négligeable.

Cette analyse est basée sur le fait que les modes du test correspondent à ceux de la prédiction ce qui n'est vrai que si les conditions aux limites sont identiques. Un modèle hybride précis isolément n'est donc pas forcément approprié pour une prédiction couplée (sous-structuration, aéroélasticité, élastoacoustique, contrôle actif, etc.). Pour illustrer ce phénomène on peut ainsi considérer le treillis montré en figure 4.8. On veut modéliser la réponse amortie, mais ne peut tester l'ensemble complet. Trois possibilités sont considérées

- test et modélisation séparées du support et de l'ensemble charge utile + amortisseur en conditions libre-libre
- test et modélisation séparées du support et de l'ensemble charge utile + amortisseur avec les amortisseurs encastrés au point de connexion sur le support (remplacement du support flexible par un support rigide).
- test et modélisation séparées du support, des amortisseurs et de la charge utile

Les résultats montrés en [bal12] indiquent que la première approche est inadaptée car le test n'induit qu'une déformation faible des amortisseurs et ne permet donc pas une bonne modélisation de leur propriétés de dissipation. La deuxième approche est tout à fait adaptée si les amortisseurs ont un comportement dynamique standard. Si la rigidité dynamique des amortisseurs dépend fortement de la fréquence (comme c'est le cas de certains amortisseurs qui présentent des pôles réels [and7]), seule la dernière approche donne de bons résultats.

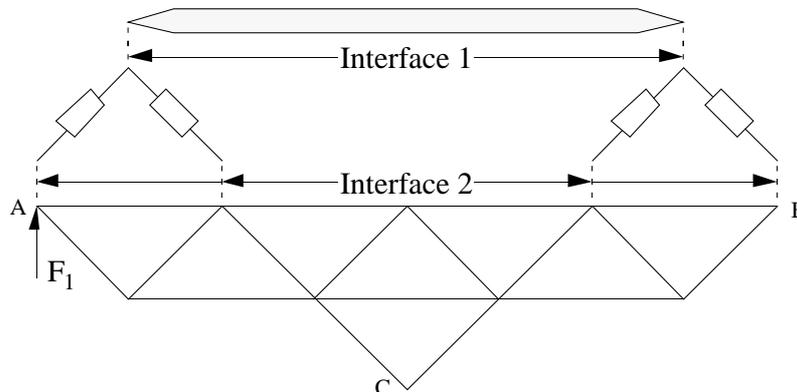


Figure 4.8: Treillis support reliée à une charge utile par des connecteurs fortement amortis [bal12].

4.5. Conclusions et perspectives

Les méthodes de réduction et de synthèse modale permettent de réutiliser des calculs particuliers pour d'autres prédictions. Historiquement ces méthodes ont été développées pour permettre certains gros calculs et leur utilisation reste essentielle dans certains secteurs comme l'aéroélasticité ou la vibroacoustique. Avec les moyens de calcul modernes, seuls des problèmes demandant de nombreuses itérations (optimisation ou calculs non linéaires) exigent vraiment leur utilisation. De tels problèmes étant souvent paramétrés, les méthodes de réduction classiques doivent être adaptées, ce qui est l'objet du chapitre 5.

Une utilisation intensive et flexible de méthodes de réduction demande cependant une bonne compréhension des étapes nécessaires et une grande flexibilité. La définition de chargements représentatifs, l'utilisation de la norme en énergie, le traitement des phénomènes de verrouillage d'interface ou le développement d'un algorithme numériquement efficace pour l'élimination de contraintes linéaires étaient donc des éléments requis pour les applications plus complexes considérées par la suite.

La construction d'estimateurs d'erreur pour les modèles réduits et le traitement du verrouillage pour des interfaces non conforme n'ont été qu'effleurés et d'autres développements pourraient être très utiles. L'introduction de calculateurs à architecture parallèle a motivé de développement de nombreuses méthodes itératives ou des solutions précédentes sont conservées comme directions de recherche. Ces applications considèrent souvent des solutions définies sur différents composants et on parle alors de méthodes de décomposition de domaine. En général ces études cherchent à fournir une estimation exacte de la solution du modèle initial. Les méthodes de réduction cherchent seulement à fournir une prédiction de qualité suffisante, mais elles constituent clairement une première itération qui pourrait être corrigée par la suite. Les liens entre ces deux domaines d'étude mériteraient d'être mieux mis en valeur.

5. MODÈLES RÉDUITS PARAMÉTRÉS

Un certain nombre d'applications majeures font usage de ce que l'on appelle ici des familles de modèles. Parmi ces applications, le *recalage de modèle* consiste en une estimation à partir d'une comparaison avec des données expérimentales de paramètres de conception (propriétés locales de masse, raideur et éventuellement amortissement). L'*optimisation de structure* est similaire au recalage mais considère des objectifs différents (par exemple limites sur les déflexions ou contraintes maximales pour différents spectres d'excitation). Enfin, pour les problèmes *non linéaires*, les propriétés changent en fonction de la fréquence, de l'historique de déformation, ou de la configuration instantanée.

Dans tous les cas, le modèle d'intérêt est caractérisé par un certain nombre de *paramètres de conception* tels que propriétés élastiques, viscoélastiques, ou géométriques, et les applications demandent un nombre élevé de prédictions pour différents points de conception (valeurs des paramètres).

Pour la plupart des structures industrielles modernes, un modèle élément fini de grande taille est imposé par la complexité géométrique et l'hétérogénéité des matériaux utilisés. Le plus souvent cependant, le nombre de paramètres de conception reste très faible. Il apparaît donc utile, surtout pour de très grands modèles, d'utiliser la faible dimension de la famille de modèles (nombre de paramètres de conception) pour permettre des approximations à faible coût.

Les très nombreuses études sur la sous-structuration, la synthèse modale ou les superéléments ont démontré la possibilité de construire des modèles réduits pour un modèle nominal donné. On considère ici (et dans les Refs. [bal17,bal18,bal22]) une extension de ces méthodes à la réduction de modèles dont les propriétés sont paramétrées.

5.1. Réduction de modèles paramétrés.

5.1.1. Paramétrisation des modèles initiaux

On appelle famille de modèles, un groupe de modèles de la forme générale du second ordre dont les matrices dépendent d'un certain nombre de paramètres de conception α

$$\begin{aligned} [s^2 M(\alpha) + sC(\alpha) + K(\alpha)]\{q\} &= [b(\alpha)]\{u\} \\ \{y(s)\} &= [c(\alpha)]\{q\} \end{aligned} \tag{5.1}$$

Modules, sections de poutres, épaisseurs de plaques, amortissements dépendant de la fréquence, positions de noeuds ou orientations de composants pour les systèmes articulés, sont des paramètres α typiques. La forme (5.1) est la plus générale, il est cependant souvent utile d'utiliser une représentation de la raideur dynamique comme une somme pondérée par des coefficients β de matrices K_β indépendantes des paramètres de conception

$$K(\alpha, s) = K(\alpha_0, s) + \sum_{\beta} \beta(\alpha) K_{\beta}(s) \quad (5.2)$$

L'épaisseur t d'une plaque, un paramètre α typique, donne un bon exemple des difficultés et avantages de la forme (5.2). Les théories habituelles de flexion de plaques (Kirchoff et Mindlin) conduisent à des modèles dont les déplacements et déformations sont des fonctions linéaires de la hauteur ($z \in [-t/2, t/2]$). Les matrices de raideur d'un élément de plaque sont obtenues par intégration (exacte ou numérique) de l'énergie de déformation associée aux fonctions de forme considérées. Les déformations étant des fonctions linéaires de z , l'énergie de déformation est une fonction quadratique de z et son intégrale sur l'épaisseur conduit à une raideur qui est une fonction cubique de t . Pour des plaques de Kirchoff composées de matériaux isotropes, tous les termes sont antisymétriques en z . L'intégration sur l'intervalle $z \in [-t/2, t/2]$ ne laisse donc que des termes en $\beta = t^3$. Pour la théorie de Mindlin, le cisaillement transverse est non nul et indépendant de z . L'intégration sur $z \in [-t/2, t/2]$, donne donc une matrice de raideur de la forme (5.2) avec $\beta_1 = t, \beta_2 = t^2, \beta_3 = t^3$ et pas de terme constant $K(\alpha_0, s)$. Pour les matrices de masse et les modèles incluant des effets de membrane, on peut montrer que la raideur dynamique $K(t, s)$ a toujours une dépendance polynomiale de t et que les paramètres $\beta_1 = t, \beta_2 = t^2, \beta_3 = t^3$ restent adaptés.

La possibilité de n'utiliser que trois paramètres β est une conséquence directe de la théorie de plaque sous-jacente et est par conséquent indépendante du nombre d'éléments, de leur propriétés géométriques, et du ou des types d'éléments utilisés. De plus, les matrices K_β peuvent être facilement déduites d'une évaluation de $K(t, s)$ pour différentes valeurs de l'épaisseur t .

Avec une description de la forme (5.2), l'évaluation de $K(t, s)$ pour une valeur de t est une somme pondérée de trois matrices. Si t était utilisé directement, il faudrait recalculer et réassembler les matrices de chacun des éléments dépendant de ce paramètre de conception (ce qui en général est beaucoup plus coûteux). La réduction de modèle par projection, détaillée dans la section suivante, augmente encore l'intérêt de la forme (5.2).

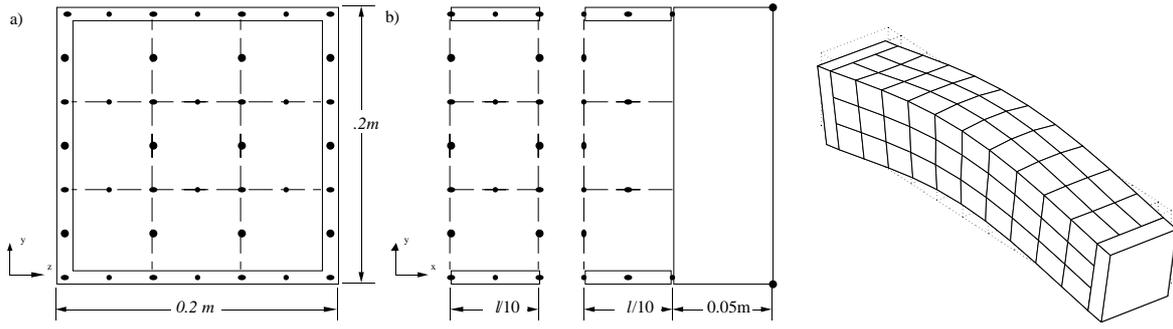


Fig. 5.1: **A** section de tube, **B** section de tube et extrémité (élément de solide hexa8 lié au tube par des contraintes de continuité), **C** tube complet. Noeuds du maillage (•). La longueur l du tube varie entre 1 et 3m [bal22].

Comme exemple de paramétrisation plus complexe considérons le tube montré dans la figure 5.1 donne un exemple plus complexe. Les parois, fines, sont modélisées en coque (élément NASTRAN cquad). Le tube est rempli d'un sable modélisé par un solide dont le module d'Young est complexe et dépend de la fréquence. Les deux paramètres de conception sont la longueur l du tube et le module $E(s)$ du sable. Par des raisonnements similaires à ceux utilisés pour l'épaisseur des plaques, on aboutit à une paramétrisation de la forme

$$K_{Sand}(E, l, s) = \left[lM_{1S}s^2 + E(s)(lK_{1S} + K_{2S} + l^{-1}K_{3S}) \right] \quad (5.3)$$

pour le sable, et

$$K_{Tube}(E, l, s) = \left[lM_{1T}s^2 + (lK_{1T} + K_{2T} + l^{-1}K_{3T} + l^{-2}K_{4T} + l^{-3}K_{5T}) \right] \quad (5.4)$$

pour les plaques du tube. On note dans ces paramétrisations, la forme de polynôme matriciel dont les coefficients peuvent faire intervenir plusieurs variables (termes $E(s)l^j$). Ce cas relativement complexe montre que le nombre de matrices K_β est susceptible d'augmenter assez rapidement.

Pour certaines applications, le recalage en particulier, les paramètres retenus influencent des groupes d'éléments différents. La décomposition (5.2) conduit alors à des matrices K_β présentant de nombreux termes nuls (tous les DDL liés aux éléments non affectés par le paramètre β courant). L'utilisation d'un format de stockage prenant cette structure en compte est alors très importante (pour limiter la mémoire requise). Le compromis mémoire requise / temps de calcul et d'assemblage peut ainsi amener à combiner les formes (5.1) et (5.2). Pour le tube considéré en Ref. [bal22], il était par exemple plus efficace d'assembler les 10 sections de tube pour chaque longueur considérée que de créer un seul gros modèle avec les paramétrisations (5.3)-(5.4).

L'optimisation du positionnement de raidisseurs est par ailleurs un problème souvent mentionné. La sous-structuration et l'utilisation d'une raideur d'interface faisant intervenir des matrices d'entrée dépendant de la position p

$$K(\alpha, s) = K(\alpha_0, s) + [b_{int}(p)][K_{int}(s)][b_{int}(p)]^T \quad (5.5)$$

sont alors tout à fait adaptées [bal17].

Les choix de la paramétrisation et de la forme de représentation sont clairement des aspects essentiels dans l'utilisation pratique de familles de modèles. Le nombre de cas étudiés en détail [bal17,bal18,bal22] étant pour l'instant assez faible (en considérer d'autres est un objectif de la thèse de A.-S. Plouin), on ne peut ici tirer des conclusions générales. Il est clair cependant que des gains de coût de calcul très significatifs peuvent être obtenus en combinant les différentes formes possibles. La flexibilité du logiciel utilisé apparaît donc comme un élément crucial pour une utilisation de modèles paramétrés.

5.1.2. Réduction d'un modèle paramétré

Comme pour les modèles nominaux, il existe souvent des sous-espaces de faible dimension permettant de bien représenter la réponse du système. Ainsi pour la flexion de poutres d'Euler-Bernoulli posées sur appuis simples, les modes propres sont des sinus dont la longueur d'onde est indépendante des propriétés de section. L'extension de cette idée à des cas plus complexes correspond à l'utilisation de bases de réduction fixes dont la construction doit être rendue systématique.

Une idée très classique serait de conserver un nombre plus important de vecteurs dans une réduction de la configuration nominale. En enrichissant la base modale, on permet certainement une amélioration des prédictions, mais l'enrichissement étant fait sans tenir compte des modifications utilisées il n'est généralement pas efficace (voir l'exemple de [bal18]).

Une deuxième approche déjà plus efficace consiste à réduire par une méthode classique (voir chapitre 4) un échantillon de modèles et à conserver la base combinée des vecteurs associés à chacune de ces réductions

$$T = [T(\alpha_1) \quad T(\alpha_2) \quad \dots] \quad (5.6)$$

Le modèle résultant étant précis pour chacune des configurations de l'échantillon, on attend et trouve en pratique [bal17,bal18,bal22] que les prédictions pour des points intermédiaires sont très bonnes. La validité générale est alors liée au choix d'un échantillon avec des variations de paramètres suffisamment larges (il faut avoir une idée des limites de variation des paramètres).

Cette approche a été utilisée pour le tube paramétré de la figure 5.1. Pour le tube creux, on considère [bal22] une réduction sur la base des 24 modes de contraintes liées aux déformations de l'extrémité complétée par 24 déformées modales des tubes de l et $3m$ avec conditions aux limites libre-libre. La figure 5.2 indique que pour des conditions aux limites différentes des conditions aux limites de la réduction, toutes les fréquences propres au dessous de 1 kHz sont bien prédites.

On notera sur cet exemple, que la projection en présence d'une paramétrisation déformant la géométrie (ici longueur du tube) est plus efficace si les DDL de rotation sont exprimés en coordonnées intrinsèques (utilisation d'une approche Lagrangienne). Ainsi, plutôt que les rotations réelles (dérivées partielles par rapport à une coordonnée physique), on utilise les dérivées partielles par rapport aux coordonnées intrinsèques (position sur un tube de référence de longueur unité).

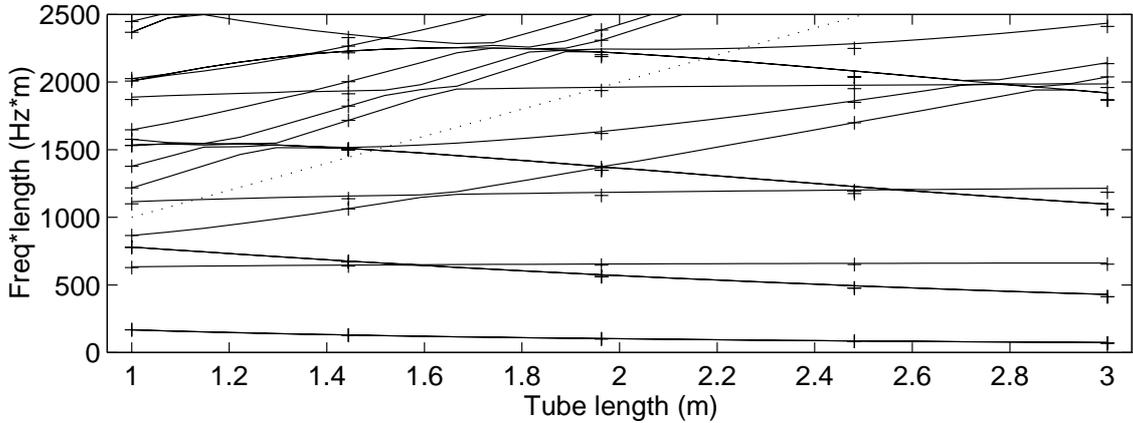


Fig. 5.2: Fréquences (fois 1) du tube encastré libre en fonction de la longueur du tube (—) modèle réduit à 72 DDL, (+) valeurs exactes du modèle initial, (....) 1 kHz.

Une dernière approche, dite de **correction des entrées/sorties**, définit des entrées b_M associées à tous les DDL sur lesquels les modifications considérées conduisent à une modification des efforts

$$K(\alpha, s) = K(\alpha_0, s) + b_M [\Delta K(\alpha, s)] b_M^T \quad (5.7)$$

et ajoute à une réduction du modèle nominal les modes correctifs (modes de contraintes ou d'attache) associés aux entrées b_M .

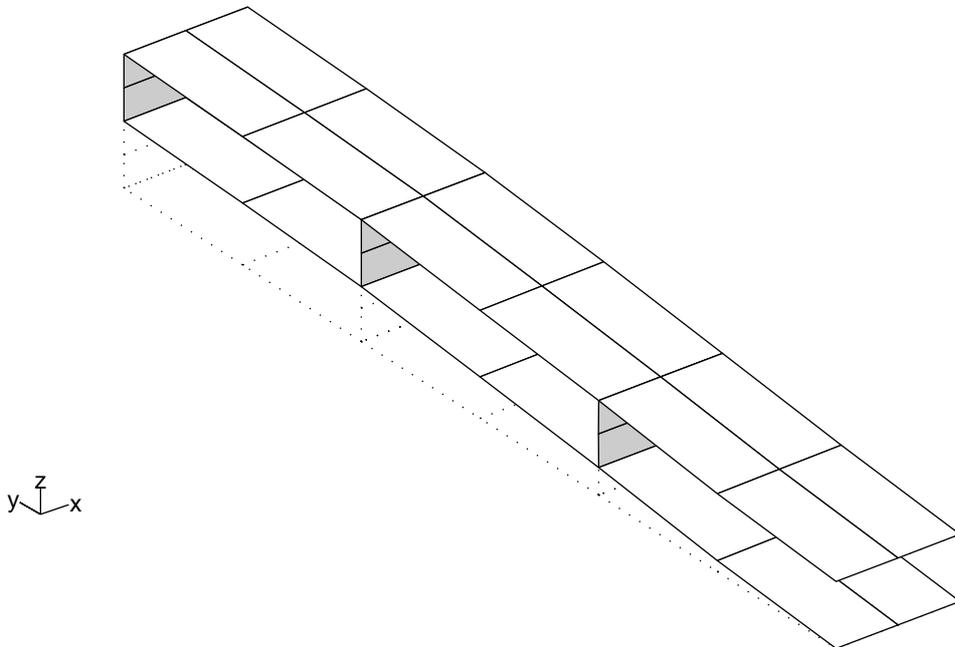


Fig. 5.3: Poutre encastrée formée de plaques minces [bal18]. Les paramètres de conception sont les raideurs des nervures (éléments en gris).

Cette approche est clairement limitée aux cas (assez fréquents) où le nombre de DDL affectés par les modifications (taille de ΔK) est petit par rapport au nombre de

DDL du modèle initial. Il est cependant possible de sélectionner des directions principales dans un sous-espace de correction (voir détails en section 4.2.1). Prenons par exemple la poutre constituée de plaques minces montrée en figure 5.3, les éléments de nervure sont reliés à 108 DDL qui représentent plus du tiers des 270 DDL du modèle. Une projection sur cette base aurait donc peu d'intérêt. La figure 5.4 montre les valeurs principales d'une décomposition liée à la norme en masse et l'évolution de l'erreur maximale pour un ensemble de 12 points de conception sur la prédiction des 10 premiers modes propres. Il apparaît clairement que garder plus de 20 directions principales dans le sous-espace des 108 modes correctifs n'améliore quasiment pas le résultat.

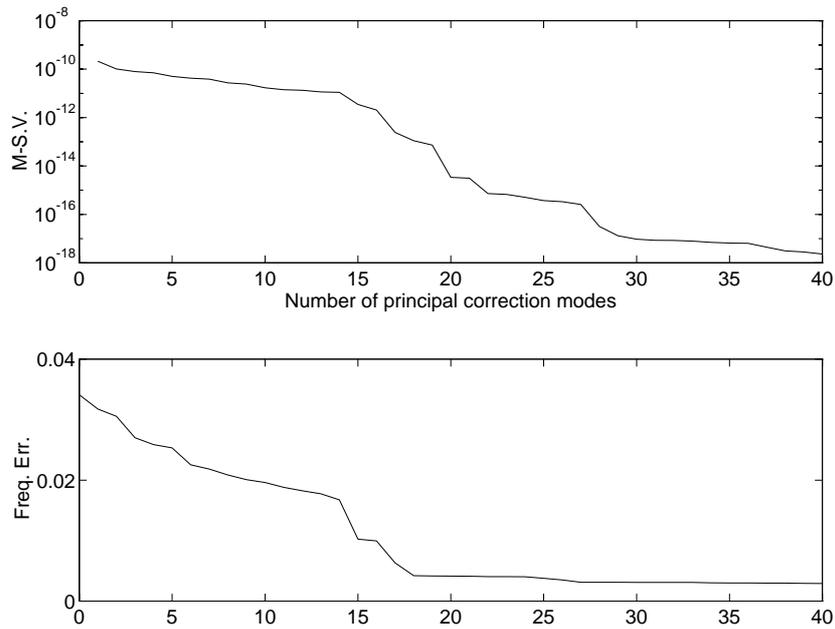


Fig. 5.4: a) valeurs singulières (norme en masse) de la décomposition des 108 vecteurs de correction initiaux. b) erreur sur les fréquences propres (moyenne sur les 12 points de conception et les 10 premières fréquences [bal18]) en fonction du nombre de directions principales retenues.

Entre les trois méthodes considérées, l'extension de la réduction nominale est, de loin, la moins efficace. C'est un résultat attendu puisque l'on n'y tient pas compte des modifications considérées, mais la qualité des prédictions est très nettement moins bonne (voir exemple en [bal18]). Les méthodes d'échantillonnage ou de correction d'entrée sortie donnent des résultats similaires et la sélection dépend essentiellement de critères de coût numérique. L'échantillonnage est adapté à des cas avec quelques modifications distribuées (panneaux raidis [bal17,bal18], tubes de longueur variable [bal22]), alors que la méthode de correction permet de bien traiter des effets locaux (recalage des propriétés d'un joint [bal3], réponse d'une structure avec des non linéarités localisées [tin1]).

5.2. Modélisation et réduction multi-échelle

On a jusqu'à présent traité de réduction (sections 4.1 et 4.2), de couplage de modèles (section 4.3), de modèles hybrides expérimentaux et analytiques (section 4.4) et de modèles réduits paramétrés (section 5.1). Les différentes méthodes considérées ont chacune de nombreuses applications particulières. Le travail présenté dans ce mémoire cherche cependant à montrer et utiliser leur synergies dans une approche générale de modélisation des structures. Le cadre général de cette approche est schématisée en figure 5.5.

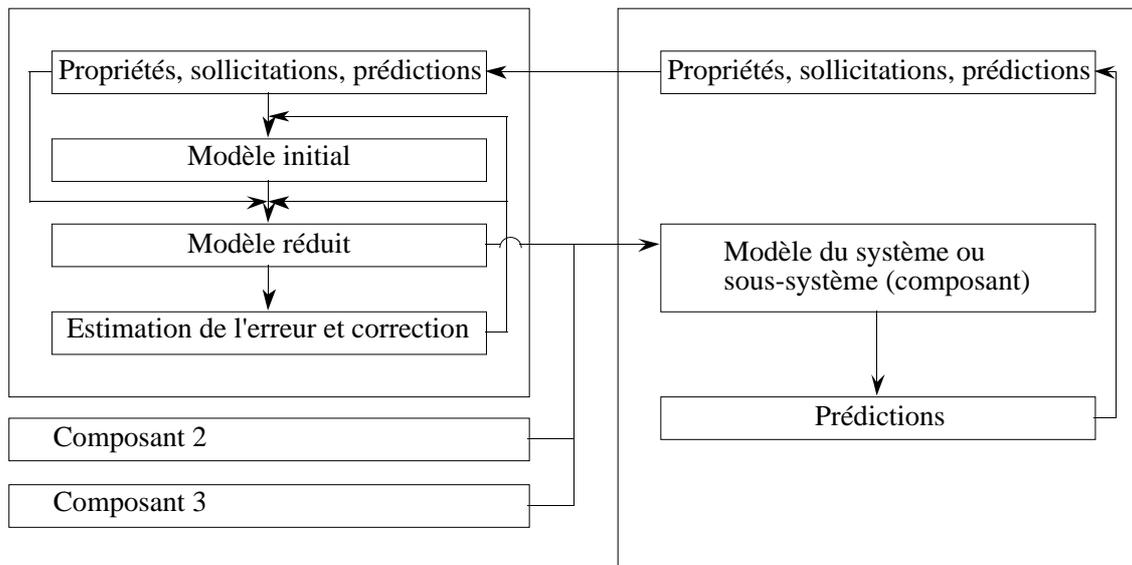


Fig. 5.5: méthodologie générale pour une approche de modélisation / réduction multi-échelle.

- On commence par détailler les propriétés géométriques et matérielles de la structure (ou de la famille de structures), les sollicitations qui seront considérées (positions, contenu fréquentiel, etc.) et les prédictions que l'on cherche à faire (déflexions maximales, contraintes, etc.).
- La donnée de ces propriétés conduit au choix de composants dont on va valider le modèle. Les propriétés, sollicitations et prédictions souhaitées pour le système sont traduites au niveau des composants, ce qui permet de créer un modèle élément fini initial.
- Les propriétés, sollicitations et prédictions souhaitées sont éventuellement réutilisées pour définir un modèle réduit.
- L'estimation d'erreurs au niveau des composants permet de corriger les modèles initiaux (recalage, maillage adaptatif) ou réduits (réduction par correction itérative).
- Les modèles de composants peuvent, après validation et éventuellement correction, être assemblés pour former un modèle du système. On peut réaliser le processus plusieurs fois en combinant les modèles de différents systèmes.

- On vérifie enfin que les prédictions réalisées sont conformes aux hypothèses initiales sur propriétés, sollicitations, et prédictions souhaitées avec éventuellement un bouclage sur le processus complet.

Le treillis, étudié en Ref. [bal22] et montré en figure 5.6, illustre ce processus. Les tubes sont creux et remplis d'un sable dont le module d'Young est complexe et dépend de la fréquence. On cherche à prédire la réponse jusqu'à 1 kHz pour des forces appliquées à quelques jonctions.

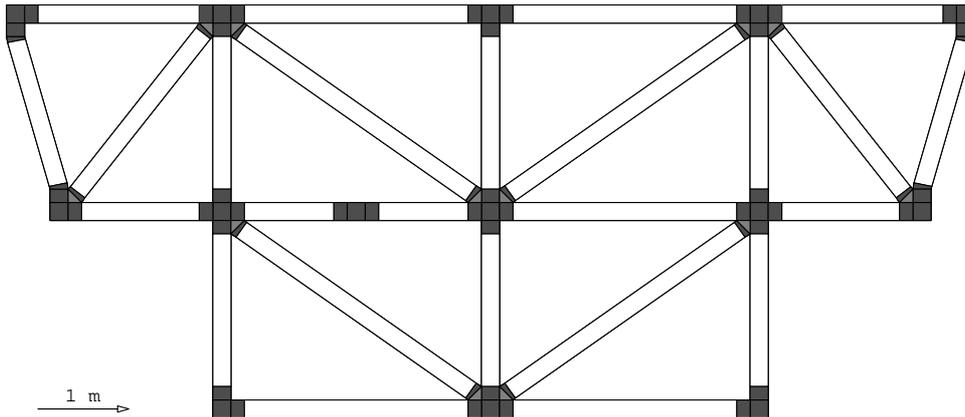


Fig. 5.6: Modélisation multi-échelle d'un treillis de poutres creuses remplies d'un sable viscoélastique [bal22].

Le modèle élément fini initial du tube est forcément très détaillé car une analyse rapide des longueurs d'ondes axiales dans le sable et de flexion dans les parois des tubes impliquent des dimensions d'élément assez faibles (maillage montré en figure 5.1). Les jonctions sont par contre solides et il ne semble pas utile de les modéliser de manière détaillée. Ces propriétés conduisent naturellement à une décomposition du système en tubes (en blanc) et jonctions (en gris).

Les jonctions sont solides et facilement modélisées à l'aide de quelques éléments de solide. La réduction de leur modèle ne présente pas d'intérêt particulier dans la mesure où l'on ne s'impose pas la compatibilité avec le maillage beaucoup plus fin des tubes (problème des jonctions incompatibles traité en section 4.3).

Les tubes ont des longueurs variables et différentes valeurs du module d'Young du sable doivent pouvoir être considérées avec un coût numérique minimal. Longueur et module sont donc les deux variables retenues pour paramétrer un unique modèle de tube (voir section 5.1.1). Aucune force externe n'étant appliquée sur les tubes seules les réponses associées à des chargements aux interfaces (extrémités) sont à considérer. Par ailleurs le modèle ne doit pas chercher à être fidèle au delà de 1 kHz.

La méthode de réduction d'un échantillon de modèles est ici la plus adaptée. La réduction considérée en [bal22] utilise des modes de contrainte pour représenter la réponse statique à des déformations des interfaces, des modes des tubes de 1 et 3 m pour bien représenter la dynamique du tube, des modes de sable pour un tube fixe pour bien représenter les mouvements internes du sable. En prenant en compte la limite en fréquence de 1 kHz, on construit ainsi un modèle réduit paramétré de 104 DDL (au lieu de 2344). Le fait que les forces sont appliquées aux extrémités n'est que partiellement utilisé par absence de critère adapté à l'élimination de formes dans un modèle

paramétré. Comme pour le cas du tube seul, abordé dans la section précédente, la vérification du modèle se fait par calcul des fréquences propres pour une gamme de paramètres et des conditions aux limites différentes de celles utilisées pour la réduction.

Les modèles de composants ainsi validés pour les propriétés, sollicitations et prédictions considérées, il est enfin possible de réaliser des prédictions pour le treillis complet comme les fonctions de transfert montrées en figure 5.7. Sans une réduction au niveau des composants, le modèle total aurait plus de 75000 DDL. Il ne serait donc pas envisageable de réaliser un calcul viscoélastique qui nécessite un assemblage et une inversion de la raideur dynamique à chaque point de fréquence. Avec la réduction le calcul devient possible et suffisamment peu coûteux pour pouvoir étudier l'impact lié à l'utilisation de différentes lois viscoélastiques. De plus la validation des modèles de composants donne une bonne confiance dans la précision des résultats.

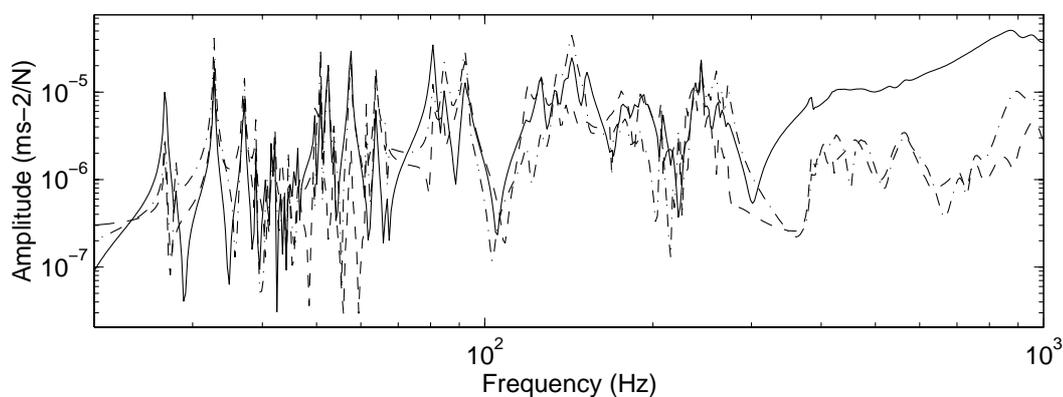


Fig. 5.7: Trois fonctions de transfert calculées pour le treillis de la figure 5.6 et un module d'Young donné à chaque fréquence.

Un calcul sur la base modale du modèle à 75000 DDL aurait pu être considéré. La bande de fréquence retenue contient cependant plusieurs centaines de modes et cette approche est donc numériquement plus coûteuse que la réduction multi-échelle retenue. Par ailleurs, on a vu que les calculs en base réduite adaptée aux paramètres considérés plutôt qu'en base modale nominale sont souvent plus précis. Les prédictions obtenues ici sont donc probablement meilleures.

La densité modale est ici telle que les prédictions sont vraiment du domaine des moyennes fréquences. Les modes sont trop sensibles à toute perturbation du modèle pour être considérés comme des quantités physiques. On s'attend par contre à ce que la réponse de sous-espaces modaux soit beaucoup plus stable et pour des amortissements suffisants (ici au dessus de 300 Hz c'est clairement le cas) les fonctions de transfert devraient avoir des caractéristiques indépendantes des recombinaisons entre modes voisins [bal6].

5.3. Conclusions et perspectives

Les problèmes paramétrés (recalage, optimisation, dynamique non linéaire) prennent un part grandissante dans l'utilisation d'outils analytiques en mécanique. Une simplification de la géométrie ou du maillage initial conduit le plus souvent à une

détérioration rapide de la qualité des prédictions. On propose donc de coupler modélisation fine et réduction.

La flexibilité des outils permettant la mise en oeuvre pratique de ces idées est bien sûr cruciale. Pour l'implémentation utilisée ici [bal2], on limite au maximum les distinctions entre éléments et superéléments (modèles de composants réduits ou non). La paramétrisation du composant est utilisée de manière similaire à celle des paramètres géométriques et matériels caractérisants les éléments initiaux. Des composants répétés peuvent être facilement associés à un modèle générique et assemblés avec la possibilité d'avoir des valeurs différentes des paramètres pour chaque composant. Un superélément peut être créé à partir d'éléments ou d'autres superéléments, le treillis traité en [bal22] utilise ainsi trois niveaux de superéléments successifs.

La flexibilité permise par cette architecture permet d'envisager de nombreuses applications. L'étude de lois de comportement viscoélastiques dans la modélisation de panneaux sandwich polymère acier, l'optimisation d'aubes avec des paramètres de conception tels que le nombre de pales et les caractéristiques de dissipation du pied d'aube et applications en recalage sont prévus pour un avenir proche (thèse de A.S. Plouin, collaboration avec F. Hemez). A moyen terme, il semble particulièrement intéressant d'étudier des prédictions de réponses en moyenne fréquence et de dynamique non linéaire (frottements, problèmes de contact).

BIBLIOGRAPHIE GÉNÉRALE

- [ahl1] Ahlin, K., "Round Robin Exercise on Modal Parameter Extraction," *IMAC*, 1995
- [all6] Allemang, R.J., Brown, D.L., "Multiple-Input Experimental Modal Analysis - A Survey," *Int. J. Anal. and Exp. Modal Analysis*, 1986, **1**-1, p. 37-44
- [all9] Allemang, R.J., Brown, D.L., Fladung, W., "Modal Parameter Estimation: A Unified Matrix Polynomial Approach," *IMAC*, 1994, p. 501-514
- [and3] Anderson, B.D.O., "A System Theory Criterion for Positive Real Matrices," *J. SIAM Control*, 1967, **5**-2, p. 171-181
- [and7] Anderson, E., Trubert, M., Fanson, J., Davis, P., "Testing and Application of a Viscous Passive Damper for Use in Precision Truss Structures," *SDM, AIAA-91-0996-CP*, 1991
- [auw1] Van der Auweraer, H., Otte, D., Debille, J., Leuridan, J., "Optimum force vector conditioning in incremental sine testing," *IMAC*, 1992, p. 299-306
- [bag1] Bagley, L.R., Torvik, P.J., "Fractional calculus - A different approach to the analysis of viscoelastically damped structures," *AIAA Journal*, 1983, **21**-5, p. 741-748
- [bal2] Balmès, E., *Structural Dynamics Toolbox™ for use with MATLAB®*, Scientific Software Group, Sèvres (France), info@ssg.fr, 1995
- [bal3] Balmès, E., *Experimental/Analytical Predictive Models of Damped Structural Dynamics*, MIT Ph.D. Thesis, SERC Report # 7-93, 1993
- [bal4] Balmès, E., "Integration of Existing Methods and User Knowledge in a MIMO identification algorithm for structures with high modal densities," *IMAC*, 1993, p. 613-619
- [bal6] Balmès, E., "High Modal Density, Curve Veering, Localization: A Different Perspective on the Structural Response," *Journal of Sound and Vibration*, 1993, **161**-2, p. 358-363
- [bal7] Balmès, E., "A Finite Element Updating Procedure Using Frequency Response Functions. Applications to the MIT/SERC Interferometer Testbed," *IMAC*, 1993, p. 176-182
- [bal8] Balmès, E., "Hybrid Experimental/Analytical Models of Structural Dynamics: Creation and Use for Predictions," *SDM Conference, AIAA Paper 93-1601-CP*, 1993, p. 2587-2595
- [bal9] Balmès, E., "Experimental/Analytical Predictive Models of Damped Structural Dynamics," *Revue Française de Mécanique*, 1994, **1**, p. 53-61
- [bal10] Balmès, E., "New results on the identification of normal modes from experimental complex modes," *Mechanical Systems and Signal Processing*, 1996, **10**-6
- [bal11] Balmès, E., "A general component model synthesis method for damped structures," *AIAA Dynamics Specialist Conference, AIAA Paper 94-1692-CP*, 1994, p. 182-190
- [bal12] Balmès, E., "Erreurs liées à la représentation de l'amortissement dans les modèles de systèmes complexes," *La Recherche Aéronautique*, 1996, **96**-1, p. 37-50
- [bal14] Balmès, E., Chapelier, C., Lubrina, P., Fargette, P., "An evaluation of modal testing results based on the force appropriation method," *IMAC*, 1995, p. 47-53
- [bal15] Balmès, E., "Erreurs liées à l'utilisation de coordonnées généralisées d'interface en synthèse modale," *Colloque National en Calcul des Structures, Giens*, 1995, p. 237-242

- [bal16] Balmès, E., "Optimal Ritz vectors for component mode synthesis using the singular value decomposition," *AIAA Journal*, 1996, **34-6**, p. 1256-1260
- [bal17] Balmès, E., "Component Mode Synthesis for Families of Reduced Finite Element Models," *Commett Program 95 International Symposium, Lyon*, 1995, p. 137-148
- [bal18] Balmès, E., "Parametric families of reduced finite element models. Theory and applications," *Mechanical Systems and Signal Processing*, 1996, **10-4**, p. 381-394
- [bal19] Balmès, E., "Frequency domain identification of structural dynamics using the pole/residue parametrization," *IMAC*, 1996, p. 540-546
- [bal20] Balmès, E., "Use of generalized interface degrees of freedom in component mode synthesis," *IMAC*, 1996, p. 204-210
- [bal21] Balmès, E., "De l'utilisation de la norme en énergie pour la création de modèles réduits en dynamique des structures," *C. R. Acad. Sci.*, Paris, 323, Série IIb, 1996, p. 255-260
- [bal22] Balmès, E., "Super-element representations of a model with frequency dependent properties," *International Seminar on Modal Analysis*, Leuven, September, 1996, **3**, p. 1767-1778
- [bal23] Balmès, E., *Boîte à Outils Tests par Appropriation*, ONERA Direction des Structures, Division essais au sol de structures aéronautiques, 1996
- [bal24] Balmès, E., "GARTEUR group on Ground Vibration Testing. Results from the test of a single structure by 12 laboratories in Europe." *IMAC*, 1997, to appear also in *Mechanical Systems and Signal Processing*, 1997
- [bal25] Balmès, E., *Modélisation analytique et expérimentale en dynamique des structures*, Notes de cour
- [bat1] Bathe, K.J., *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1982
- [ber5] Berger, H., Ohayon, R., Barthe, L., Chaquin, J.P., "Parametric Updating of Finite Element Model Using Experimental Simulation - A Dynamic Reaction Approach," *IMAC*, 1990, p. 180-186
- [ber7] Bert, C.W., "Material Damping: An Introductory Review of Mathematical Models, Measures, and Experimental Techniques," *Journal of Sound and Vibration*, 1973, **29-2**, p. 129-153
- [bla3] Blanchard, L., *Modélisation d'une tôle sandwich acier-polymère-acier et optimisation de ses propriétés amortissantes*, Thèse de doctorat. Université Paris 6, 1994
- [cog1] Cogan, S., Lenoir, D., Lallement, G., Bricout, J.N., "An improved frequency response residual for model correction," *IMAC*, 1996, p. 568-575
- [cra11] Craig, R.R.Jr., Kim, H.K., Su, T.J., "Some applications of Lanczos vectors in structural dynamics," *IMAC*, 1988, p. 501-506
- [cra1] Craig, R.R. Jr., Kurdila, A.J., Kim, H.M., "State-Space Formulation of Multi-Shaker Modal Analysis," *Int. J. Anal. and Exp. Modal Analysis*, 1990, **5-3**
- [cra2] Craig, R.R. Jr., Blair, M.A., "A Generalized Multiple-Input, Multiple-Output Modal Parameter Estimation Algorithm," *AIAA Journal*, 1985, **23-6**, p. 931-937
- [cra3] Craig, R. R. Jr., "A Review of Time-Domain and Frequency Domain Component Mode Synthesis Methods," *Int. J. Anal. and Exp. Modal Analysis*, 1987, **2-2**, p. 59-72
- [cra4] Craig, R.R. Jr., Bampton, M.C., "Coupling of Substructures for Dynamic Analyses," *AIAA Journal*, 1968, **6-7**, p. 1313-1319
- [cra9] Craig, R.R., Chang, C.J., "On the use of attachment modes in substructure coupling for dynamic analysis," *AIAA Paper 77-405-CP*, 1977, p. 89-99
- [cro1] Crowley, S.M., Allemang, R.J., "Applications of the Polyreference Technique in Experimental Modal Analysis," *IMAC*, 1984, p. 111-117
- [cro2] Crowley, J.R., Rocklin, G.T., Hunt, D.L., Vold, H., "The Practical Use of the Polyreference Modal Parameter Estimation Method," *IMAC*, 1984, p. 126-133

- [dav2] Davis, L.P., Workman, B.J., Chu, C.C., Anderson, E.H., "Design of a D-Strut and Its Applications Results in the JPL, MIT, and LARC Test Beds," *SDM, AIAA-92-2274-CP*, 1992, p. 1524-1530
- [ewi1] Ewins, D.J., *Modal Testing: Theory and Practice*, John Wiley and Sons, Inc., New York, NY, 1984
- [ewi8] Ewins, D.J., Griffin, J., "A State of the Art Assessment of Mobility Measurement Techniques – Results for the Mid-Range Structures (30-3000 Hz)," *Journal of Sound and Vibration*, 1981, **78-2**, p. 197-222
- [far1] Farhat, C., Géradin, M., "A Hybrid Formulation of a Component Mode Synthesis Method," *33rd SDM Conference, AIAA Paper 92-2383-CP*, 1992, p. 1783-1796
- [far3] Farhat, C., "A Lagrange Multiplier Based Divide and Conquer Finite Element Algorithm," *Computing Systems in Engineering*, 1991, **2-2/3**, p. 149-156
- [far4] Farhat, C., Roux, F.X., "Implicit parallel processing in structural mechanics," *Computational Mechanics Advances, Elsevier Science, BV, Amsterdam*, 1994
- [far5] Farhat, C., Géradin, M., "On the computation of the null space and generalized inverse of a large matrix, and zero energy modes of a structure," *DTA/NAFEMS Conference, Windermere, UK, July*, 1996
- [fri2] Friot, E., Roure, A., "Multimodal feedback control of a vibrating plate with non-colocated piezoelectric actuators and sensors," *3rd Conference on Dynamics and Control of Structures in Space, London, Mai, 96*, 1996
- [ger3] Géradin, M., Rixen, D., *Théorie des Vibrations. Application à la Dynamique des Structures.*, Masson, Paris, 1993
- [gir1] Girard, A., "Modal Effective Mass Models in Structural Dynamics," *IMAC*, 1991, p. 45-50
- [gla1] Gladwell, G.M.L., "Branch mode analysis of vibrating systems," *J. Sound Vib.*, 1964, **1**, p. 41-59
- [guy1] Guyan, R.J., "Reduction of Mass and Stiffness Matrices," *AIAA Journal*, 1965, **3**, p. 380
- [has4] Hasselman, T.K., "Modal Coupling in Lightly Damped Structures," *AIAA Journal*, 1976, **14-11**, p. 1627-1628
- [hem2] Hemez, F.M., Farhat, C., "Comparing Mode Shape Expansion Methods for Test-Analysis Correlation," *IMAC*, 1994, p. 1560-1567
- [hob1] Ho, B.L., Kalman, R.E., "Effective Construction of Linear State-Variable Models from Input/Output Data," *Proc. of 3rd Annual Allerton Conference on Circuit and System Theory*, 1965, p. 449-459
- [iba1] Ibanez, P., Blakely, K.D., "Automatic Force Appropriation - A Review and Suggested Improvements," *IMAC*, 1984, p. 903-907
- [ibr2] Ibrahim, S.R., "Modal Identification from Control Versus Structural Dynamics Views," *IMAC*, 1988, p. 1-7
- [ibr3] Ibrahim, S.R., "Dynamic Modeling of Structures from Measured Complex Modes," *AIAA Journal*, 1983, **21-6**, p. 898-901
- [ibr4] Ibrahim, S.R., "Computation of Normal Modes from Identified Complex Modes," *AIAA Journal*, 1983, **21-3**, p. 446-451
- [ibr7] Ibrahim, S.R., Füllekrug, U., "Investigation into Exact Normalization of Incomplete Complex Modes by Decomposition Transformation," *IMAC*, 1990, p. 205-212
- [imr2] Imregun, M., Ewins D.J., "Realization of Complex Mode Shapes," *IMAC*, 1993, p. 1303-1309
- [inm1] Inman, D.J., *Engineering Vibration*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1994
- [jac1] Jacques, R.N., Miller D.W., "Multivariable Model Identification From Frequency Response Data," *32nd C.D.C.*, 1993
- [jac2] Jacques, R.N., *On-line system identification and control design for flexible structures*, MIT Ph.D. Thesis, SERC report#11-94, 1994

- [jen1] Jen, C.W., Johnson, D.A., Dubois, F., "Numerical modal analysis of structures based on a revised substructure synthesis approach," *Journal of Sound and Vibration*, 1995, **180**-2, p. 185-203
- [jua1] Juang, J.N., Pappa, R.S., "An Eigensystem Realization Algorithm (ERA) for Modal Parameter Estimation and Model Reduction," *J. Guidance, Control, and Dynamics*, 1985, **8**-5, p. 620-627
- [lan1] Lanczos, C., "An iteration method for the solution of eigenvalue problem of linear differential and integral operators," *J.Res.Nat.Bur.Standards*, 1950, **45**, p. 255-282
- [lee1] Lee, H.G., Dobson, B.J., "The Direct Measurement of Structural Mass, Stiffness, and Damping Properties," *Journal of Sound and Vibration*, 1991, **145**-1, p. 61-81
- [les1] Lesieutre, G.A., Mingori, D.L., "Direct Time-Domain, Finite Element Modelling of Frequency-Dependent Material Damping Using Augmenting Thermodynamic Fields (ATF)," *SDM Conference, AIAA paper 89-1380-CP*, 1989
- [leu2] Leuridan, J.M., Brown, D.L., Allemang R.J., "Direct System Parameter Identification of Mechanical Structures with Application to Modal Analysis," *SDM, AIAA-82-0767 CP*, 1982
- [lev7] Levine-West, M.B., Kissil, A., Milman, M., "Evaluation of Mode Shape Expansion Techniques on the Micro-Precision Interferometer Truss," *IMAC*, 1994, p. 212-218
- [lin4] Link, M., Weiland, M., Barragan, J.M., "Direct Physical Matrix Identification as Compared to Phase Resonance Testing. An assesment based on practical application." *IMAC*, 1987, p. 804-811
- [lju1] Ljung, L., "System Identification: Theory for the User," *Prentice-Hall*, 1987
- [mac2] MacNeal, R.H., "A hybrid method of component mode synthesis," *Computers and structures*, 1971, **1**-4, p. 581-601
- [mcc2] McConnell, K.G., *Vibration Testing. Theory and Practice.*, Wiley Interscience, New-York, 1995
- [nas2] Nash, M., "Use of the Multivariate Mode Indicator Function for Normal Mode Identification," *IMAC*, 1988, p. 740-744
- [nie2] Niedbal, N., "Analytical Determination of Real Normal Modes From Measured Complex Responses," *SDM, AIAA Paper 84-0995-CP*, 1984, p. 292-295
- [oca1] O'Callahan, J.C., "Comparison of Reduced Model concepts," *IMAC*, 1990
- [oca2] O'Callahan, J.C., Avitabile, P.A., Riemer, R., "System Equivalent Reduction Expansion Process (SEREP)," *IMAC*, 1989, p. 29-37
- [ott1] Otte, D., Debillé, J., Leuridan, J., "Enhanced Force Vector Appropriation Methods for Normal Mode Testing," *IMAC*, 1993, p. 1310-1316
- [pap2] Pappa, R.S., Ibrahim, S.R., "A Parametric Study of the ITD Modal Identification Algorithm," *Shock and Vibration Bulletin*, 1981, **43**-7, p. 43-72
- [par4] Park, K.C., Alvin, K.F., Perterson, L., "Extraction of Undamped Normal Modes and Nondiagonal Modal Damping Matrix from Damped System Realization Parameters," *SDM*, 1993, p. 3059-3070
- [pet1] Peterson, L.D., Allen, J.J., ..., "An Experimental and Analytical Synthesis of Controlled Structure Design,"
- [pet4] Petitjean, B., Legrain, I., "Feedback controllers for broadband active noise reduction," *2nd European Conference on Smart Structures and Materials*, Glasgow, October, 1994
- [pie4] Piet-Lahanier, N., Chemoul, B., Mourey, P., "Réponse transitoire de structures quasi incompressibles viscoélastiques. Application aux propulseurs à propergol solide du lanceur Ariane 5." *Colloque National en Calcul des Structures, Giens*, 1993
- [pir1] Piranda, J., *Analyse modale et recalage de modèles*, Mémoire d'habilitation à diriger des recherches. Université de Franche Comté., 1994
- [pla1] Placidi, F., Poggi, F., Sestieri, A., "Real Modes Computation from Identified Modal Parameters with Estimate of Generalized Damping," *IMAC*, 1991, p. 572-579

- [ray1] Rayleigh, J.W.S., *The Theory of Sound*, Dover Publications, New-York, NY, 1945 (reedition)
- [rei1] Reix, C., et al., "Updating the damping matrix using frequency response data," *IMAC*, 1996, p. 585-590
- [ric1] Richardson, M.H., Formenti, D.L., "Global Curve Fitting of Frequency Response Measurements Using the Rational Fraction Polynomial Method," *IMAC*, 1985, p. 390-397
- [roy3] Roy, N.A., Girard, A., Bugeat, L.-P., "Expansion of Experimental Modeshapes - An Improvement of the Projection Technique," *IMAC*, 1993, p. 152-158
- [roy4] Roy, N.A., Girard, A., Bugeat, L.-P., "Enhanced Updating of Finite Element Models Using an Energy Approach," *IMAC*, 1993, p. 655-660
- [rub1] Rubin, S., "Improved Component-Mode Representation for Structural Dynamic Analysis," *AIAA Journal*, 1975, **13**-8, p. 995-1006
- [ses1] Sestieri, A., Ibrahim, S.R., "Analysis of Errors and Approximations in the Use of Modal Coordinates," *Journal of sound and vibration*, 1994, **177**-2, p. 145-157
- [smi2] Smith, S.W., Beattie, C.A., "Simultaneous Expansion and Orthogonalization of Measured Modes for Structure Identification," *Dynamics Specialist Conference*, AIAA-90-1218-CP, 1990, p. 261-270
- [tin1] Tingaud, J., *Couplages non linéaires dans la dynamique d'une aile d'avion.*, Mémoire de DEA réalisé à l'ONERA, 1995
- [tra3] Tran, D.M., "Méthode de Lanczos par bloc appliquée aux problèmes de vibration des structures amorties," *Revue européenne des éléments finis*, 1995, **4**-1, p. 33-54
- [tra4] Tran, D.M., "Méthodes de synthèse modal mixtes," *Revue européenne des éléments finis*, 1992, **1**-2, p. 137-179
- [val1] Vallet, C., "Identification de modèles dynamiques de structures basée sur la paramétrisation pôle/résidue et des données fréquentielles," *ONERA, Mémoire de DEA*, 1996
- [wei3] Wei, M.L., Allemang, R.J., Brown, D.L., "Real Normalization of Measured Complex Modes," *IMAC*, 1987, p. 708-712
- [wil2] Williams, R., Crowley, J., Vold, H., "The Multivariate Mode Indicator Function in Modal Analysis," *IMAC*, 1985, p. 66-70
- [zan1] Zang, L., Kanda, H., Lembregts, F., "Some Applications of Frequency Domain Polyreference Modal Parameter Identification Method," *IMAC*, 1986, p. 1237-1245
- [zha1] Zhang, Q., Lallement, G., "Comparison of Normal Eigenmodes Calculation Methods Based on Identified Complex Eigenmodes," *J. Spacecraft and Rockets*, 1987, **24**-1, p. 69-73
- [zha3] Zhang, Q., Lallement, G., "New Method of Determining the Eigensolutions of the Associated Conservative Structure from the Identified Eigensolutions," *IMAC*, 1985, p. 322-328
- [zie1] Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L., *The Finite Element Method*, MacGraw-Hill, 1989
- [zim3] Zimmerman, D.C., Simmermacher, T., Kaouk, M., "Structural damage detection using frequency response functions," *IMAC*, 1995, p. 179-184

PUBLICATIONS

Articles de journaux avec comité de lecture

- (1) Balmès, E., "GARTEUR group on Ground Vibration Testing. Results from the test of a single structure by 12 laboratories in Europe." *Mechanical Systems and Signal Processing*, Soumis en Novembre 1996.
- (2) Balmès, E., "New Results on the Identification of Normal Modes from Identified Complex Modes," *Mechanical Systems and Signal Processing*. A paraître en Novembre 1996.
- (3) Balmès, E., "De l'utilisation de la norme en énergie pour la création de modèles réduits en dynamique des structures," *C. R. Acad. Sci. Paris*, 323, Série II b, p. 255-260, 1996.
- (4) Balmès, E., "Parametric families of reduced finite element models. Theory and application.," *Mechanical Systems and Signal Processing*, 1996, **10**-4, p. 381-394.
- (5) Balmès, E., "Optimal Ritz vectors for component mode synthesis using the singular value decomposition," *AIAA Journal*, 1996, **34**-6, p. 1256-1260
- (6) Balmès, E., "Erreurs liées à la représentation de l'amortissement dans les modèles de systèmes complexes," *La Recherche Aérospatiale*, **96**-1, pp. 37-50

- (7) Balmès, E., "Experimental/Analytical Predictive Models of Damped Structural Dynamics," *Revue Française de Mécanique*, **94**-1, pp. 53-61
- (8) Balmès, E., "High Modal Density, Curve Veering, Localization: A Different Perspective on the Structural Response," *Journal of Sound and Vibration*, 1993, **161**-2, pp. 358-363

Mémoires

- (9) Balmès, E., *Experimental/Analytical Predictive Models of Damped Structural Dynamics*, MIT, Ph.D. Thesis, SERC report # 7-93, 1993
- (10) Balmès, E., *Modeling Structural Dynamics for Control*, MIT, Masters of Science Thesis, SERC report #14-91
- (11) Balmès, E., *Modélisation des effets de sous-structure dans la dynamique des treillis*, Mémoire de DEA, ONERA, 1990

Rapports

- (12) Balmès, E., *Comparison of test results*, GARTEUR SM-AG-19, Juin 1996.
- (13) Balmès, E., *The reference set of results from SOPEMEA*, GARTEUR SM-AG-19, Sept. 1995.
- (14) Balmès, E., *Documentation for the GARTEUR SM-AG19 Testbed*, GARTEUR SM-AG-19, Mars 1995.
- (15) Lepart, M., Balmès, E., *Identification modale par appropriation et par identification, comparaison de résultats sur des essais A340*, Interne ONERA, Octobre 1996.

Logiciels

- (16) Balmès, E., *STRUCTURAL DYNAMICS TOOLBOX for use with MATLAB*. Distribué par Scientific Software Group. Version 1.0 Aout 93. V2.0 Juin 1995. V3.0 Décembre 1996.
- (17) Balmès, E., *Toolbox Appropriation*. Usage interne ONERA. Dernière révision Juillet 1996.

Actes de conférences avec comité de sélection

- (18) Balmès, E., "Model reduction for systems with frequency dependent damping properties," *International Modal Analysis Conference*, 1997
- (19) Balmès, E., "GARTEUR group on Ground Vibration Testing. Results from the test of a single structure by 12 laboratories in Europe." *International Modal Analysis Conference*, 1997
- (20) Balmès, E., "Super-element representations of a model with frequency dependent properties" *International Seminar on Modal Analysis*, Leuven, September, 1996, p. 1767-1778
- (21) Balmès, E., "Use of generalized interface degrees of freedom in component mode synthesis" *International Modal Analysis Conference*, 1996, pp. 204-210
- (22) Balmès, E., "Frequency domain identification of structural dynamics using the pole/residue parametrization" *International Modal Analysis Conference*, 1996, pp. 540-546
- (23) Balmès, E., "Component Mode Synthesis for families of reduced finite element models" *International Symposium MV2-COMETT*, Lyon, France, October, 1995
- (24) Balmès, E., "Erreurs liées à l'utilisation de coordonnées généralisées d'interface en synthèse modale" *2^e Colloque National en Calcul des Structures*, Giens, France, Juin, 1995, p. 237-242

- (25) Balmès, E., Chapelier, C., Fargette, P., Lubrina, P., "An evaluation of modal testing results based on the force appropriation method" *International Modal Analysis Conference*, 1995, p. 47-53
- (26) Balmès, E., "Parametric families of reduced finite element models. Theory and application." *International Modal Analysis Conference*, 1995, p. 307-314
- (27) Balmès, E., "Erreurs liées à la représentation de l'amortissement dans les modèles de systèmes complexes," *Colloque CNES / ESA Structure des véhicules spatiaux* (Cépaduès, Toulouse), Juin 1994, p. 135-150
- (28) Balmès, E., "Component model synthesis using experimental non-proportional damping models," *Dynamics Specialist Conference, AIAA Paper 94-1692*, 1994, p. 182-190
- (29) Balmès, E., "New Results on the Identification of Normal Modes from Identified Complex Modes," *International Modal Analysis Conference*, 1994, pp. 1576-1582
- (30) Balmès, E., "Hybrid Experimental/Analytical Models of Structural Dynamics: Creation and Use for Predictions," *SDM Conference, AIAA Paper 93-1601*, April 1993
- (31) Balmès, E., "Integration of Existing Methods and User Knowledge in a MIMO identification algorithm for structures with high modal densities," *International Modal Analysis Conference*, 1993, pp. 613-619
- (32) Balmès, E., "A Finite Element Updating Procedure Using Frequency Response Functions. Applications to the MIT/SERC Interferometer Testbed.," *International Modal Analysis Conference*, 1993, pp. 176-182
- (33) Balmès, E., Crawley, E.F., "Designing and Modeling Structural Dynamics for Control. Applications to the MIT/SERC interferometer testbed," *1st CNES/ESA SMAC conference*, Nice (France), December, 1992

Documents pédagogiques

- Balmès, E., *Eléments de dynamique des structures*, Notes de cours, Société des Amis de l'ENSAE et de L'ENSTA. Mars 1995.
- Balmès, E., *Modèles analytiques et expérimentaux en dynamique des structures*, Notes de cours, DEA dynamique des structures et couplages. Décembre 1995, révision Décembre 1996.
- Balmès, E., *Introduction à la méthode des éléments finis*, Notes de cours. ENSTA. Avril 1996.